



Universidad Carlos III de Madrid

Tesis doctoral

Geolocalizaciones newtoniana y postnewtoniana
mediante la técnica TDOA. El efecto “time-delay” de Shapiro

Autor: María del Carmen Rodríguez Teijeiro

Director: José María Gambi Fernández

Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química
Grupo de Modelización, Simulación y Matemática Industrial

Enero de 2011



Universidad Carlos III de Madrid

Tesis doctoral

Geolocalizaciones newtoniana y postnewtoniana
mediante la técnica TDOA. El efecto “time-delay” de Shapiro

Memoria que se presenta para optar al título de Doctor por la Universidad Carlos III de Madrid por el programa en Ingeniería Matemática

Autor: María del Carmen Rodríguez Teijeiro

Director: José María Gambi Fernández

Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química
Grupo de Modelización, Simulación y Matemática Industrial

Enero de 2011

Tesis doctoral

Geolocalizaciones newtoniana y postnewtoniana mediante
la técnicaTDOA. El efecto “time-delay” de Shapiro

Autor: María del Carmen Rodríguez Teijeiro

Director: José María Gambi Fernández

Firma del Tribunal Calificador:

Nombre y Apellidos	Firma
Presidente:	
Vocal:	
Vocal:	
Vocal	
Secretario:	

Calificación:

Leganés, de de 2011

A mis padres Claudio y Virtudes

Agradecimientos

Quiero agradecer, en primer lugar y de manera especial, al profesor D. José María Gambi Fernández la ayuda y dirección de este trabajo. Sin su apoyo y atención no habría podido llevar a cabo esta Tesis.

Mi agradecimiento a Isaías y a mis dos hijos Raúl y Andrés, porque su ayuda y su ánimo han sido muy importantes para terminar esta Tesis.

Quiero manifestar mi máximo agradecimiento a mis padres pues, aunque ellos no tuvieron la oportunidad de formarse en las aulas, siempre se preocuparon por mis doce hermanos y por mi facilitándonos el camino para que pudiéramos hacer los estudios que cada uno eligió a lo largo de su vida.

También quiero agradecer el apoyo y el ánimo que me ha dado, y sigue dándome, mi tío, Jesús Rodríguez Iglesias, para llevar a cabo mis estudios superiores.

Mi agradecimiento al profesor D. Luis López Bonilla, director del Grupo de Modelización, Simulación y Matemática Industrial de la Universidad Carlos III de Madrid, por la acogida que me dió al incorporarme a este Grupo, lo que me ha permitido llevar a cabo este trabajo.

Y mi agradecimiento a mis compañeros, Mario Salas, Ignacio Arana, M^a Luisa García del Pino, Paúl Medina y Ana María Glaván, por estar a mi lado a lo largo de estos años. Su compañía y colaboración me han enriquecido.

Índice general

1. Introducción	1
2. La función de universo	15
2.1. Definición general y propiedades	21
2.2. La función de universo para el campo gravitatorio terrestre	25
2.2.1. Cálculo en coordenadas cartesianas	25
2.2.2. Cálculo en coordenadas isotrópicas	29
2.2.3. Cálculo en coordenadas de curvatura (estandar) . . .	30
2.2.4. Puntos alineados	31
2.3. La ecuación del tiempo	35
2.3.1. Las técnicas de Soffel y de Weinberg	35
2.3.2. La técnica de la función de universo	40
3. Ecuaciones de Geolocalización por TDOA para tres satélites	45
3.1. Ecuaciones en la aproximación newtoniana (Relatividad Especial)	45
3.1.1. Satélites geoestacionarios	47
3.1.2. Satélites ecuatoriales	62
3.2. Ecuaciones en la aproximación postnewtoniana (Relatividad General)	65
3.2.1. Satélites ecuatoriales	65

4. Ecuaciones de Geolocalización por TDOA para cuatro satélites	79
4.1. Ecuaciones en la aproximación newtoniana (Relatividad Especial)	79
4.1.1. El caso de tres satélites no ecuatoriales	79
4.1.2. Cuatro satélites ecuatoriales	82
4.1.3. Cuatro satélites no ecuatoriales	83
4.2. Ecuaciones en la aproximación postnewtoniana (Relatividad General)	99
4.3. Resumen	107
 5. Ecuaciones de Geolocalización por TDOA para cinco satélites arbitrarios	 109
5.1. Ecuaciones en la aproximación newtoniana (Relatividad Especial)	109
5.1.1. Independencia de las ecuaciones y soluciones únicas .	113
5.1.2. Sistemas con ruido	122
5.2. Ecuaciones en la aproximación postnewtoniana (Relatividad General)	125
5.2.1. Formulación postnewtoniana con ruido	128
5.3. Matrices de diseño	133
5.4. Resumen	137
 6. Simulación Numérica	 139
 Conclusiones	 191
 Apéndice	 193
 Bibliografía	 194

Capítulo 1

Introducción

En esta Tesis se presenta un procedimiento para localizar radiotransmisores pasivos situados en el entorno de la Tierra mediante satélites artificiales y mediciones TDOA. Las localizaciones de los radiotransmisores se determinan en forma cerrada mediante ecuaciones algebraicas que corresponden a los modelos newtoniano y postnewtoniano del campo gravitatorio terrestre.

La Geolocalización, es decir, la localización de un radiotransmisor cuyas señales son captadas por un conjunto de receptores en posiciones conocidas, es una técnica muy importante que tiene numerosas aplicaciones en diversos escenarios, tanto civiles como militares. Entre estas aplicaciones cabe destacar las de la vigilancia aérea, terrestre y marítima; la búsqueda y rescate de personas y buques en alta mar y la aproximación controlada de los aviones a los aeropuertos. También se utiliza en el diseño de sistemas inteligentes de transporte, así como para el seguimiento de animales salvajes, teléfonos móviles y de vehículos (v.,p.e., [32], [35], [38], [39] y [41]). El problema de la Geolocalización es, pues, en cierto sentido, el problema inverso del de Navegación.

Dependiendo de la naturaleza de los radiotransmisores, los receptores están situados en tierra o, bien, en el espacio exterior, aunque también existen configuraciones mixtas (v.,p.e., [42]).

Los métodos más usuales para determinar la posición de un radiotransmisor son: el método AOA (Angle Of Arrival), con el que se trata de determinar ángulos de llegada de la señal emitida (v.,p.e.,[25]); el método TOA (Time Of Arrival), con el que se utilizan los instantes de llegada de la señal a los receptores (v.,p.e., [34]) y el método TDOA (Time Difference Of Arrival), en el que los datos son las diferencias de los tiempos de llegada de la señal a los receptores. En este caso, los receptores

más comúnmente utilizados son los satélites artificiales (v.p.e., [3], [5], [14], [21], [26]-[30], [32], [33], [34], [36] y [48]).

De estos tres métodos, el más adecuado para localizar un radiotransmisor pasivo, es decir, que no coopera en su localización, es el método TDOA. Las razones de su idoneidad son las siguientes: primera, las antenas que se utilizan con el método AOA se han de calibrar con mucha frecuencia para alcanzar suficiente precisión, y esto implica un mantenimiento muy costoso [53]; segunda, para utilizar el método TOA se necesita que el radiotransmisor coopere (al menos proporcionando el instante de emisión de la señal [38]) y, finalmente, con el método TDOA, igual que con el método TOA, no se necesitan receptores dedicados exclusivamente al fin que se persigue y, por lo tanto, el coste de la localización es relativamente bajo [38] y [50].

El método TDOA se describe muy bien en términos geométricos ya que, como se verá un poco más adelante (v.(1.6)), las diferencias de tiempos de llegada de la señal a cada par de receptores determinan las posibles posiciones del radiotransmisor a lo largo de una hipérbola, o de un hiperboloide, que tienen a estos receptores como focos (de hecho, este método se conoce también como el de "localización hiperbólica"). Así, y salvo en casos especiales, es fácil ver que con tres receptores se puede determinar teóricamente la posición del radiotransmisor en un plano como intersección de dos hipérbolas, mientras que con cuatro receptores se puede determinar su posición en el espacio como intersección de tres hiperboloides, si bien en la práctica se utiliza un número mayor de receptores para encontrar, de hecho, computacionalmente, la localización más probable, cualquiera que sea la determinación requerida, superficial o espacial, ya que las intersecciones de las hipérbolas, o hiperboloides, que dan, en cada caso, la posición del radiotransmisor, no determinan nunca un único punto debido a los errores en las mediciones.

El problema de la Geolocalización de un radiotransmisor que está situado en el entorno de la Tierra mediante mediciones TDOA consiste, pues, en la utilización como sistema de receptores de un conjunto apropiado de satélites artificiales para la determinación computacional de las coordenadas espaciales del radiotransmisor en el instante en que éste emite una señal, así como de ese instante, utilizando mediciones TDOA ([3], [4], [35], [51] y [52]).

En particular, cuando el radiotransmisor es pasivo las ecuaciones más idóneas para determinar su localización son aquellas cuya solución computacional se puede encontrar de manera autónoma, es decir, sin información adicional externa.

Pues bien, con el procedimiento que se presenta en esta Tesis para la resolución de este problema se alcanzan los dos siguientes objetivos: primero, se obtienen localizaciones, en muchos casos únicas, mediante ecuaciones algebraicas cuya resolución numérica resulta relativamente sencilla (excepto en algunos casos) y, segundo,

se incrementa la precisión nominal newtoniana de cada localización utilizando el modelo postnewtoniano del campo gravitatorio terrestre.

Para alcanzar estos objetivos hemos utilizado, por un lado, la función de universo de Synge, tanto para el modelo newtoniano como para el modelo postnewtoniano del campo gravitatorio terrestre [1] y, por otro, hemos introducido un conjunto apropiado de modificaciones en los dos métodos de Geolocalización por TDOA propuestos por Ho y Chan para satélites geoestacionarios [3], de manera que estas modificaciones permiten utilizar, además de este tipo de satélites, cualquier otro.

La razón para elegir esta metodología está, por un lado, en que la función de universo de Synge permite formular en forma finita y covariante cualquier propiedad geométrica intrínseca del espacio-tiempo exterior terrestre y, por otro, en que los métodos de Ho y Chan proporcionan ecuaciones algebraicas que resuelven el problema en cuestión casi satisfactoriamente (en el modelo newtoniano) [31].

En particular, debido a la posibilidad de iniciar la formulación de los problemas de Navegación y Geolocalización de manera análoga mediante la función de universo de Synge, las localizaciones que se obtienen en esta Tesis para el problema de la Geolocalización por TDOA corresponden a los dos modelos gravitatorios del espacio-tiempo terrestre que se utilizan actualmente para resolver el problema de Navegación ([7], [8], [9] y [10]).

De esta forma, además de encontrar localizaciones, en muchos casos únicas, con el nivel de precisión que corresponde al modelo newtoniano, obtenemos también las correspondientes soluciones con el nivel de precisión que corresponde al modelo postnewtoniano, igual que en el problema de Navegación.

Naturalmente, consideramos estos dos modelos porque, aunque con el primero se puede proporcionar suficiente precisión para la mayor parte de las aplicaciones prácticas, para otras aplicaciones, como ocurre en Navegación, esta precisión no es suficiente.

Para mostrar cuál es la semejanza, así como la diferencia de tratamiento computacional, entre el problema de la Geolocalización por TDOA y el de Navegación (por ejemplo, con GPS) comenzaremos mostrando que, en términos de la función de universo de Synge, las ecuaciones básicas que relacionan las coordenadas de un radiotransmisor con las de los satélites para el problema de Geolocalización son, efectivamente, las mismas, excepto por un factor, que las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un receptor con las de los satélites para el problema de Navegación. De hecho, estas ecuaciones se pueden escribir de la misma manera mediante esta función, ya sea el modelo del espacio-tiempo exterior terrestre newtoniano o

postnewtoniano. Así, partiendo de las ecuaciones

$$\Omega(x_T^i, x_S^j) = 0, \quad (1.1)$$

donde $\Omega(x_T^i, x_S^j)$ representa cualquiera de las dos funciones de universo correspondientes a los dos modelos de espacio-tiempo alrededor de la Tierra, se pueden obtener fácilmente las ecuaciones básicas correspondientes. En estas ecuaciones, igual que en (1.1), x_T^α son, en el problema de la Geolocalización, las coordenadas espaciales del radiotransmisor, T , en el momento de emisión de la señal y, en el caso de Navegación, del receptor en el momento de recepción de las señales de los satélites, que denotamos en ambos casos por x_T^0 . Por su parte, x_S^α son las coordenadas espaciales de los satélites, S , que, de acuerdo con el problema de la Geolocalización, reciben la señal emitida por el radiotransmisor en los momentos de su llegada a cada satélite, x_S^0 , o bien, de acuerdo con el problema de Navegación, emiten señales en los instantes x_S^0 (los índices latinos varían de 0 a 3 y, los griegos, de 1 a 3).

Así, las *Figs.1.1* y *1.2* corresponden al problema de Navegación y las *Figs.1.3* y *1.4* corresponden al problema de Geolocalización. En la *Fig.1.1* el espacio-tiempo es minkowskiano, y en la *Fig.1.2* se representa el espacio-tiempo postnewtoniano. En ambas figuras, igual que en las *Figs.1.3* y *1.4*, el dibujo es bidimensional, de manera que el eje vertical es el eje temporal ($x^0 = t$) y el eje horizontal representa los ejes espaciales, x^α . En la *Fig.1.1* el vértice del cono nulo en la línea de universo del receptor, T , corresponde al suceso de recepción de las señales de navegación, (x_T^0, x_T^α) , y los puntos gruesos son los sucesos que corresponden a los instantes de emisión de las señales de navegación, $(x_{S_i}^0, x_{S_i}^\alpha)$, en este caso, de las señales enviadas por cuatro satélites cuyas líneas de universo son S_1 , S_2 , S_3 y S_4 . Estas señales se propagan en líneas rectas del espacio minkowskiano a lo largo del cono nulo de manera que, de acuerdo con la ecuación en (1.1), alcanzan al receptor, precisamente, en el vértice (x_T^0, x_T^α) . La *Fig.1.2* es semejante a la *Fig.1.1* con la diferencia de que ahora las líneas de universo, tanto del receptor como las de los satélites y las de las señales emitidas, son ligeramente curvas debido a que el espacio-tiempo ya no es

minkowskiano, sino postnewtoniano.

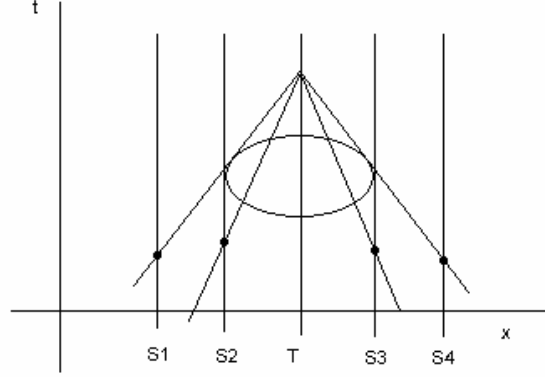


Fig.1.1 Navegación en el modelo newtoniano

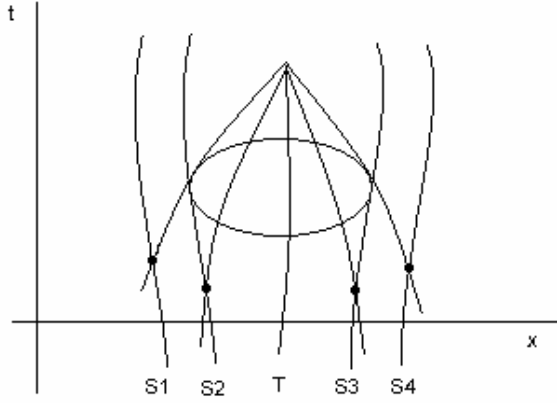


Fig.1.2 Navegación en el modelo postnewtoniano

Finalmente, las *Figs.1.3* y *1.4* corresponden, como hemos dicho, al problema de la Geolocalización. Como se puede ver, para este problema y para cada modelo de espacio-tiempo, los dibujos aparecen simétricos respecto de los correspondientes al problema de Navegación (en el sentido de que ahora el emisor está en los vértices de los conos nulos y la señal es captada por los satélites en los sucesos $(x_{S_i}^0, x_{S_i}^\alpha)$, que son los que vienen representados por los correspondientes puntos gruesos). En la *Fig.1.4* se muestra también la diferencia de tiempos de llegada de la señal emitida a

los satélites S_1 y S_3 , $t_1 - t_3$, que es uno de los datos del problema de Geolocalización por TDOA.

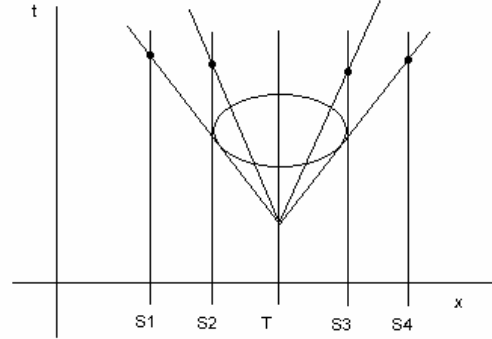


Fig.1.3 Geolocalización en el modelo newtoniano

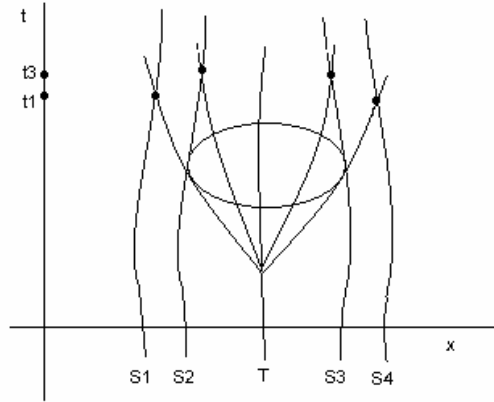


Fig.1.4 Geolocalización en el modelo postnewtoniano

Consideremos ahora un satélite, S , que emite señales de Navegación o, bien, capta una señal que proviene de un radiotransmisor. Entonces, puesto que en el modelo newtoniano del espacio-tiempo alrededor de la Tierra la función de universo, $\Omega(x_T^i, x_S^j)$, tiene la siguiente forma en el sistema de coordenadas ECI (Earth-Centered Inertial) [16]

$$\Omega(x_T^i, x_S^j) = \frac{1}{2} \left[(\Delta x^\alpha)^2 - (\Delta x^0)^2 \right], \quad (1.2)$$

donde $\Delta x^\alpha = x_S^\alpha - x_T^\alpha$ y $\Delta x^0 = x_S^0 - x_T^0$ ($c = 1$), tenemos, por un lado, que la correspondiente ecuación general de Navegación se obtiene simplemente resolviendo (1.1) para Δx^0 teniendo en cuenta que, para este caso, $x_S^0 < x_T^0$ por razones obvias y, por otro, que la ecuación básica a utilizar para deducir las ecuaciones de Geolocalización por TDOA se obtiene de la misma manera con la única diferencia de que, en este caso, $x_S^0 > x_T^0$. La resolución de la ecuación (1.1) es sencilla en ambos casos. El resultado para Navegación es:

$$x_T^0 - x_S^0 = -\Delta x^0 = |\Delta x^\alpha| = r_{TS}, \quad (1.3)$$

y para la Geolocalización por TDOA es:

$$x_S^0 - x_T^0 = \Delta x^0 = |\Delta x^\alpha| = r_{TS}, \quad (1.4)$$

donde $r_{TS} = |x_S^\alpha - x_T^\alpha|$ es el pseudo-rango euclídeo desde el satélite en consideración hasta el receptor, o radiotransmisor en su caso, expresado en segundos ($c = 1$).

Por lo tanto, la única diferencia entre las ecuaciones básicas necesarias para obtener las ecuaciones para la Geolocalización por TDOA y las ecuaciones generales de Navegación en el modelo newtoniano del campo gravitatorio terrestre está en las condiciones de causalidad que hay que imponer en cada caso. Estas son, como se acaba de ver, $x_S^0 > x_T^0$ para el problema de la Geolocalización, y $x_S^0 < x_T^0$ para el problema de Navegación.

Ahora bien, mientras que con cuatro ecuaciones similares a la ecuación en (1.3),

$$x_T^0 - x_{S_i}^0 = -\Delta x^0 = |\Delta x^\alpha| = r_{TS_i}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.5)$$

se tiene claramente para el problema de Navegación el conjunto preciso de ecuaciones que permite determinar de manera unívoca las cuatro incógnitas, (x_T^0, x_T^α) , correspondientes a las coordenadas del receptor, ahora no se pueden utilizar de manera análoga otras cuatro ecuaciones similares a las ecuaciones en (1.4) para resolver el problema de la Geolocalización de un radiotransmisor por TDOA, ya que los datos disponibles no son análogos.

En efecto, mientras que los datos a disposición del receptor para resolver las ecuaciones en (1.5) son las coordenadas, $x_{S_i}^\alpha$, referidas a los instantes de emisión de las señales de Navegación, $x_{S_i}^0$, los datos que se utilizan para la Geolocalización por TDOA son, en cambio, $(x_{S_i}^0 - x_{S_j}^0, x_{S_i}^\alpha, x_{S_j}^\alpha)$, donde $x_{S_i}^0 - x_{S_j}^0$ representa las diferencias de tiempos de llegada de la señal emitida por el radiotransmisor a los satélites S_i y S_j , y $x_{S_i}^\alpha, x_{S_j}^\alpha$ son las coordenadas espaciales de los satélites S_i y S_j implicados en la localización del radiotransmisor en los instantes de llegada de la señal a cada satélite.

Por esta razón, las ecuaciones de Geolocalización por TDOA involucran a parejas de satélites.

Para ver cuál es la naturaleza de estas ecuaciones en el caso de que $\Omega(x_T^i, x_S^j)$ venga dada por (1.2), así como para determinar el número de ecuaciones a considerar para resolver este problema en este modelo que estamos considerando (el newtoniano), junto con la de los procedimientos numéricos para su resolución, se puede observar, primero, que, como para un satélite arbitrario se tiene, de acuerdo con (1.4), que $x_S^0 = x_T^0 + r_{TS}$, entonces para dos satélites, S_i y S_j , se tiene

$$x_{S_i}^0 - x_{S_j}^0 \equiv r_{i,j} = r_{TS_i} - r_{TS_j},$$

donde $r_{TS_i} = |x_{S_i}^\alpha - x_T^\alpha|$ y $r_{TS_j} = |x_{S_j}^\alpha - x_T^\alpha|$; o, más explícitamente,

$$\begin{aligned} x_{S_i}^0 - x_{S_j}^0 &= \sqrt{(x_{S_i}^1 - x_T^1)^2 + (x_{S_i}^2 - x_T^2)^2 + (x_{S_i}^3 - x_T^3)^2} - \\ &\quad \sqrt{(x_{S_j}^1 - x_T^1)^2 + (x_{S_j}^2 - x_T^2)^2 + (x_{S_j}^3 - x_T^3)^2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

que es donde mejor se pone de manifiesto, por un lado, la interpretación geométrica del problema mencionada anteriormente, ya que esta ecuación es la de un hiperboloide de focos $x_{S_i}^\alpha$ y $x_{S_j}^\alpha$ y constante $x_{S_i}^0 - x_{S_j}^0$ y, por otro, la dificultad de su resolución debido al carácter no lineal de las ecuaciones a considerar.

De esta forma, queda claro que en el modelo newtoniano hacen falta en principio tres ecuaciones del tipo (1.6) para determinar las coordenadas espaciales del radiotransmisor, x_T^α , en el momento de emisión de la señal, de manera que para determinar el instante de emisión, x_T^0 , hace falta utilizar (una vez que se han determinado x_T^α) cualquier ecuación del tipo (1.4) que corresponda a alguno de los satélites involucrados en la localización del radiotransmisor (no obstante, en un instante matizaremos esta afirmación).

Por otro lado, en el Capítulo 2 se demuestra que en el nivel de aproximación postnewtoniano del espacio-tiempo terrestre $\Omega(x_T^i, x_S^j)$ tiene la siguiente forma en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \Omega(x_T^i, x_S^j) &= \frac{1}{2} \left[(\Delta x^\alpha)^2 - c^2 (\Delta x^0)^2 \right] + \\ &\quad m |\Delta x^\alpha| \left(\log \left(\frac{tg \frac{\theta_T}{2}}{tg \frac{\theta_S}{2}} \right) + \cos \theta_T - \cos \theta_S \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{m (\Delta x^0)^2}{|\Delta x^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta_T}{2}}{tg \frac{\theta_S}{2}} \right), \quad (1.7)$$

de manera que, al comparar esta expresión con la dada en (1.2), se puede ver que la parte principal en (1.7) es la aproximación newtoniana que aparece en (1.2) (como no puede ser de otra manera) y el resto contiene los términos postnewtonianos de segundo orden que caracterizan a la función postnewtoniana. Estos términos son coeficientes de m , que es la masa de la Tierra medida en segundos ($c = G = 1$) y contienen: (a) el pseudo-rango euclídeo, $|\Delta x^\alpha|$, que es la distancia euclídea desde la posición del radiotransmisor en el instante de emisión de la señal, x_T^0 , a la posición del satélite S , x_S^α , en el instante de su llegada, x_S^0 ; y (b) los ángulos θ_T y θ_S , que son los ángulos euclídeos que los vectores x_T^α y x_S^α forman con el vector $\Delta x^\alpha = x_S^\alpha - x_T^\alpha$.

Los términos de segundo orden de la función de universo en (1.7) son, pues, los que hacen que el comportamiento de las señales emitidas se describa de manera distinta en los modelos newtoniano y postnewtoniano del campo terrestre.

Así, mientras que para el modelo newtoniano las líneas de universo de cualquier señal son, de acuerdo con (1.2), rectas nulas del espacio minkowskiano, como se dijo anteriormente (v. *Fig. 1,3*), en el modelo postnewtoniano estas líneas son, de acuerdo con (1.7), geodésicas nulas de la aproximación débil del campo de Schwarzschild para el campo gravitatorio terrestre (v. *Fig. 1.3* y Capítulo 2).

En términos físicos esto significa que, mientras que en el modelo newtoniano cualquier señal se propaga en el espacio exterior a velocidad c y no se tiene en cuenta una posible diferencia entre el comportamiento del reloj del radiotransmisor y el de los satélites, así como la posible diferencia de comportamiento de los relojes de los satélites entre sí, en el modelo postnewtoniano se produce un retardo de la señal, que es el efecto denominado “time-delay” de Shapiro ([11], [12], [7] y [20]) y sí se tienen en cuenta las diferencias de comportamiento de los relojes mediante los términos de segundo orden que aparecen en (1.7).

En particular, estos términos son los que hacen que las señales se propaguen en el espacio exterior a lo largo de trayectorias curvas que, ciertamente, por ser (los términos) de segundo orden, resultan cercanas a las trayectorias rectas correspondientes al modelo newtoniano.

De hecho, en el Capítulo 2 se demuestra que el valor para Δx^0 , cuando $\Omega(x_T^i, x_S^j)$ viene dada por (1.7), es

$$x_S^0 = x_T^0 + r_{TS} + m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_T}{2}}{tg \frac{\theta_S}{2}} \right) + \cos \theta_T - \cos \theta_S \right], \quad (1.8)$$

y allí se podrá ver cómo los términos de segundo orden dan cuenta del efecto “time-delay” de Shapiro, de manera que la ecuación postnewtoniana de Geolocalización por TDOA para los satélites S_i y S_j , aparecerá dada por (v. Capítulo 3)

$$x_{S_i}^0 - x_{S_j}^0 = r_{i,j} + m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_i}}{2} tg \frac{\theta_{S_j}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_i}}{2} tg \frac{\theta_{T_j}}{2}} \right) + (\cos \theta_{T_i} - \cos \theta_{T_j}) + (\cos \theta_{S_j} - \cos \theta_{S_i}) \right], \quad (1.9)$$

donde θ_{T_i} y θ_{S_i} , son los ángulos euclídeos que x_T^α y $x_{S_i}^\alpha$ forman con $\Delta x_i^\alpha = x_{S_i}^\alpha - x_T^\alpha$, respectivamente.

Ahora es cuando podemos matizar la afirmación hecha anteriormente de que se requieren al menos cuatro ecuaciones para determinar las coordenadas de un radiotransmisor porque, de hecho, este número se puede reducir a tres cuando se sabe, por ejemplo, que el radiotransmisor está sobre la superficie de la Tierra [3].

Y finalmente, queremos resaltar de nuevo (para completar este análisis) que la soluciones del problema de la Geolocalización por TDOA para radiotransmisores pasivos no se deben buscar de manera análoga a como se buscan las soluciones en el problema de Navegación, esto es, mediante métodos iterativos. Y esto es así porque, mientras que los procedimientos iterativos análogos a los de Navegación son eficientes cuando los radiotransmisores cooperan, ya que en estos casos se puede garantizar la convergencia hacia la localización verdadera iniciando las iteraciones con las localizaciones proporcionadas por los propios radiotransmisores (v., p.e., [13]), resulta que, para el caso que nos ocupa, es decir, para localizar radiotransmisores pasivos, es muy importante disponer de métodos que no necesiten estos datos ([23], [37] y [40]).

Pues bien, en este tipo de métodos se enmarcan los dos métodos propuestos por Ho y Chan [3], así como los dos que se proponen en esta Tesis (también se pueden encontrar otros en [15], [23], [24], [40], [46] y [47]).

En síntesis, los métodos de Ho y Chan involucran a tres y cuatro satélites geostacionarios, respectivamente, y con ellos se puede encontrar un conjunto de posibles localizaciones mediante el uso de ecuaciones lineales que, sin ser aproximación de las ecuaciones originales, resultan casi equivalentes a ellas.

Por su parte, nuestros métodos son semejantes a los de estos autores ya que los hemos construido, primero, modificando y, después, generalizando estos métodos para hacerlos más eficientes.

De esta forma, hemos construido un primer método con el que se reduce el número de posibles localizaciones obtenidas con el primer método de Ho y Chan y, después, un segundo, con el que se obtienen (por primera vez, hasta donde sabemos)

localizaciones únicas que se pueden tomar, en la forma que se muestra en el Capítulo 5, como primeras aproximaciones de las localizaciones verdaderas para alcanzar la mejor solución mediante métodos de ajuste, como el de los mínimos cuadrados.

Además, al tiempo que mostramos cómo se modifican los métodos de Ho y Chan para encontrar un número más reducido de localizaciones, mostramos también que esta reducción se puede conseguir sin imponer restricciones sobre los tipos de satélites involucrados en las mediciones TDOA, tal como que los satélites tengan que ser geoestacionarios, así como sin utilizar (con el segundo método) información adicional externa, tal como que el radiotransmisor esté en un determinado cuadrante de la Tierra.

En concreto mostramos, primero, cómo se puede modificar el primer método en [3] para poder utilizar tres satélites ecuatoriales no necesariamente geoestacionarios, aunque se sigue suponiendo que el radiotransmisor está sobre la superficie de la Tierra y, después, probamos que las cuatro localizaciones que se obtienen con el primer método en [3] se pueden reducir a dos (aunque no a menos de dos, excepto cuando el radiotransmisor está sobre el Ecuador) cuando se utiliza un conjunto apropiado de ecuaciones para este tipo de satélites. De esta forma resolvemos el problema con nuestro primer método dando dos localizaciones (excepto, obviamente, cuando el radiotransmisor está sobre el Ecuador) utilizando tres satélites ecuatoriales, de manera que una localización está en el hemisferio Norte y, la otra (simétrica respecto del Ecuador) en el hemisferio Sur.

A continuación, mostramos cómo el segundo método en [3] se puede modificar, a su vez, para poder utilizar satélites que no son ecuatoriales (y, por lo tanto, geoestacionarios) y, después, mostramos cómo, al utilizar cinco satélites arbitrarios, se obtienen localizaciones únicas, excepto en una circunstancia, cualquiera que sea la posible situación del radiotransmisor (es decir, esté éste sobre la superficie de la Tierra o en el espacio exterior). Esta circunstancia, que es verdaderamente excepcional, es la que se produce cuando los cinco satélites aparecen en el mismo plano orbital (en particular, en el plano ecuatorial) en los instantes de recepción de las señal emitida.

En resumen, el procedimiento que presentamos en esta Tesis para resolver el problema de la Geolocalización de radiotransmisores pasivos mediante el método TDOA es el siguiente:

Si se sabe que el radiotransmisor está sobre la superficie de la Tierra, entonces se pueden utilizar tres satélites ecuatoriales (en particular, geoestacionarios) para obtener dos localizaciones. En este caso, para poder elegir la localización correcta será necesaria información adicional, aunque, obviamente, no tan precisa como la

que se requiere con el primer método en [3], ya que sólo habrá que conocer el hemisferio donde está el radiotransmisor. Pero también se pueden utilizar cinco satélites arbitrarios para obtener una única localización, lo cual siempre será posible, excepto cuando todos los satélites aparezcan en el mismo plano orbital en los instantes de recepción de la señal, como se acaba de decir. Finalmente, en el caso de que no se pueda saber si el radiotransmisor está sobre la superficie de la Tierra queda la opción de utilizar cinco satélites, de manera que, si éstos no están en el mismo plano orbital en los momentos de recepción de la señal emitida por el radiotransmisor, se podrá encontrar una única localización, allí dondequiera que éste esté. Desde el punto de vista operativo esto implica que, si en los momentos de recepción de la señal ocurriera esta circunstancia, sólo cabrían dos opciones para localizar al radiotransmisor en tiempo real, que son: primera, recurrir al primer método, naturalmente a costa de perder unicidad y siempre que se sepa que el radiotransmisor está sobre la superficie de la Tierra o, bien, tomar los datos TDOA cuando desaparezca fehacientemente esa configuración tan excepcional, lo que impide la utilización de cinco satélites ecuatoriales y, en particular, geoestacionarios. Por lo tanto, la idoneidad de la vía a seguir en términos de tiempo y coste depende de la facilidad con la que se pueda desechar una de las dos localizaciones obtenidas mediante los tres satélites que se usen con el primer método.

Para acabar esta introducción nos gustaría mencionar, por un lado, el hecho de que la dependencia de las correcciones postnewtonianas de cualquier Geolocalización por TDOA sigue determinados patrones debido a la naturaleza del efecto “time-delay” de Shapiro y, por otro, los dos resultados siguientes, que se refieren a la magnitud de estas correcciones: el primero es que éstas pueden variar desde unos pocos centímetros hasta decenas de metros, especialmente si el radiotransmisor está en el espacio exterior, y el segundo es que en cualquier vecindad de numerosas configuraciones orbitales de los satélites involucrados en la Geolocalización, para las que las correcciones son ciertamente pequeñas, existen configuraciones próximas para las que las correspondientes correcciones son comparativamente grandes. Estos resultados se deben a que el efecto “time-delay” de Shapiro se puede magnificar, especialmente cuando se utilizan cinco satélites, ya que la funciones de universo del espacio-tiempo terrestre, tanto a nivel newtoniano como postnewtoniano, dependen, en este caso, de dieciocho variables independientes.

La Tesis está organizada en seis capítulos de la manera siguiente: el Capítulo 1 es la presente Introducción. En el Capítulo 2 se introduce la función de universo de Synge tal como está definida en [1] y, a partir de esta definición, se deducen las funciones de universo para el espacio-tiempo en el entorno de la Tierra, tanto en la aproximación newtoniana como en la postnewtoniana. Por razones de com-

patibilidad con otros trabajos previos, la función de universo correspondiente a la aproximación postnewtoniana se obtiene en coordenadas cartesianas (que son, siguiendo a Synge, las coordenadas con las que hemos realizado esos trabajos). No obstante, también se deducen en coordenadas estandar, o de curvatura, y en coordenadas isotrópicas que en este orden de aproximación son equivalentes a las coordenadas armónicas. Este capítulo se finaliza deduciendo la función de universo en coordenadas cartesianas para el caso en que el radiotransmisor esté alineado al menos con un satélite (con respecto al centro del sistema de referencia ECI) ya que la expresión general degenera para este caso, cualquiera que sean las coordenadas utilizadas. En el Capítulo 3 se demuestra, primero, que el número de localizaciones obtenidas mediante el primer método de Ho y Chan se puede reducir a dos mediante la modificación que se detalla y, a continuación, generalizamos este método para tres satélites que, estando todavía en órbitas ecuatoriales, no necesariamente están en órbitas geoestacionarias, como se supone en [3]. Se considera este caso más general debido a que el supuesto de que los satélites están en posiciones fijas es puramente ficticio, puesto que la mayoría de los satélites geoestacionarios se separan varios kilómetros de sus posiciones nominales, tanto en longitud como en distancia radial, en pocos días [19] y, también, porque este comportamiento puede enmascarar la precisión de la posición de cualquier radiotransmisor. Finalmente, en este capítulo se demuestra que las cuatro soluciones indicadas en [3] nunca se pueden reducir a menos de dos, excepto cuando el radiotransmisor está sobre el Ecuador. En el Capítulo 4 se muestra una modificación del segundo método de Ho y Chan con la que se obtienen también dos localizaciones newtonianas (ya sean los satélites utilizados geoestacionarios, o no) y las correspondientes localizaciones postnewtonianas y, en el Capítulo 5, se muestra finalmente, la modificación de este segundo método que permite encontrar la única localización exacta mencionada anteriormente en cada nivel de aproximación, es decir, la que corresponde al nivel newtoniano y la que corresponde al nivel postnewtoniano. Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan simulaciones numéricas para corroborar las afirmaciones hechas anteriormente acerca de los patrones de comportamiento, así como del tamaño de las correcciones debidas al efecto “time-delay” de Shapiro, que es el único que interviene en las localizaciones postnewtonianas, como se verá en los capítulos siguientes.

Capítulo 2

La función de universo

Como hemos dicho en la Introducción, la herramienta que utilizamos para resolver el problema de la Geolocalización de un radiotransmisor que está situado en el entorno de la Tierra, tanto en el nivel newtoniano como en el postnewtoniano, es la función de universo de Synge. Esta función fué introducida en Cálculo Tensorial por Ruse [55], Yano y Muto [56] y Schouten [57] y utilizada por Synge para formular los problemas astrométricos y geodésicos básicos en la Teoría General de la Relatividad (TGR) [1].

Utilizamos esta función, primero, porque en la TGR las relaciones espaciotemporales se basan, como se sabe, en la existencia de una métrica cuadridimensional, de forma que los conceptos matemáticos asociados a cualquier medición se describen mediante transformaciones tensoriales, junto con la conexión afín y la relación de la métrica con el tiempo propio a lo largo de la línea de universo de cualquier observador; segundo, porque la función de universo es, precisamente, la mitad del cuadrado de la medida Riemanniana entre dos sucesos del espacio-tiempo a lo largo de la (única) geodésica que los une; tercero, porque esta función es también muy útil desde el punto de vista práctico ya que, al ser una magnitud escalar, se puede relacionar directamente con las mediciones. y, finalmente, porque es la herramienta más poderosa para obtener de la forma más sencilla posible el efecto “time-delay” de Shapiro, como se verá en este Capítulo.

Por otro lado, la razón para describir nuestro problema en el marco postnewtoniano de la TGR está en que este marco es el apropiado para describir con precisión el movimiento de los satélites artificiales terrestres, así como los problemas asociados a cualquier proceso de medición (por ejemplo, en Navegación o Geolocalización) en el que intervienen estos satélites.

Así, de acuerdo con el formalismo postnewtoniano de la TGR, el espacio-tiempo alrededor de la Tierra está caracterizado por un conjunto de formas métricas entre las que cabe destacar las siguientes ($c = G = 1$):

1. “Forma cartesiana” en coordenadas armónicas e isotrópicas:

$$ds^2 = (1 + 2U) \delta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - (1 - 2U) (dx^4)^2. \quad (2.1)$$

2. “Forma cartesiana” en coordenadas de curvatura:

$$ds^2 = \left(\delta_{\alpha\beta} + 2U \frac{x^\alpha x^\beta}{r^2} \right) dx^\alpha dx^\beta - (1 - 2U) (dx^4)^2, \quad (2.2)$$

donde $x^4 = t$ y U es el potencial gravitatorio terrestre.

Por otro lado, los sistemas de referencias que se usan, tanto en Navegación como en Geolocalización, son los siguientes:

1. El sistema **ECI** (Earth-Centered Inertial) que, como su propio nombre indica, tiene la propiedad de que en él las ecuaciones que rigen el movimiento de los satélites son, en primer orden de aproximación, las ecuaciones newtonianas [16]. Este es el sistema de referencia en el que se calculan las órbitas de los satélites y se caracteriza porque tiene el origen en el centro de masas de la Tierra; el plano XY es el plano ecuatorial de la Tierra; el eje Z es perpendicular al plano XY en la dirección del Polo Norte y el eje X se dirige a una posición fija en el espacio y
2. El sistema **ECEF** (Earth-Centered Earth-Fixed) , que gira solidariamente con la Tierra alrededor del eje Z del sistema ECI a razón de $\omega_E = 7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad./sg}$ y es el sistema en el que se da la localización de los radiotransmisores. En él se fijan, por tanto, la longitud, latitud y altura de los radiotransmisores [6] y [54] . Las características del sistema **ECEF** son las siguientes: el plano XY coincide con el plano ecuatorial terrestre; el eje X se dirige al meridiano de longitud 0; el eje Y se sitúa a 90° en dirección Este y el eje Z es perpendicular al Ecuador y está dirigido hacia el Polo Norte.

De esta manera, igual que en Navegación, en el problema de la Geolocalización las efemérides de los satélites se dan en el sistema **ECI** y, después, se transforman al sistema **ECEF**, que es donde se calculan las coordenadas espaciales y la coordenada temporal de los radiotransmisores.

A este respecto conviene destacar que, puesto que en la TGR prácticamente todas las coordenadas espaciales carecen de significado físico para las observaciones, se puede hacer formalmente el cambio estandar a “coordenadas polares” como un cambio meramente matemático para pasar a escribir las formas métricas (2.1) y (2.2) en términos de estas nuevas coordenadas. En concreto, simplificando la figura de la Tierra a la de una esfera, la siguiente transformación

$$\begin{aligned}x^1 &= r \cos \theta \cos \varphi \\x^2 &= r \cos \theta \sin \varphi \\x^3 &= r \sin \theta \ ,\end{aligned}\tag{2.3}$$

hace que el potencial U toma la forma

$$U = \frac{m}{r},\tag{2.4}$$

donde $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, φ es la longitud del punto de coordenadas (x^1, x^2, x^3) y θ es su colatitud, es decir, el ángulo polar medido desde el eje Z hasta la dirección (x^1, x^2, x^3) . (Por supuesto, igual que antes, m (la masa de la Tierra) aquí se toma en segundos ya que estamos suponiendo que $c = G = 1$. De esta forma, a partir de (2.1) y (2.2) se tienen las dos siguientes "formas polares" de la métrica correspondiente:

1. “Forma polar” en coordenadas armónicas e isotrópicas :

$$ds^2 = (1 + 2U) (dr^2 + r^2 d\sigma^2) - (1 - 2U) (dt)^2.\tag{2.5}$$

2. “Forma polar” en coordenadas de curvatura:

$$ds^2 = (1 + 2U) dr^2 + r^2 d\sigma^2 - (1 - 2U) (dt)^2,\tag{2.6}$$

donde $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$.

Así que, de acuerdo con la TGR, las métricas en (2.1) y (2.5) son la solución en coordenadas isotrópicas de las ecuaciones linealizadas de las ecuaciones de campo de Einstein para una tierra esférica aislada, y de la misma manera ocurre con (2.2) y (2.6), que corresponden a la solución en coordenadas de curvatura [58].

Ahora bien, como se puede ver en todas estas expresiones, la coordenada temporal $x^4 = t$ corresponde al tiempo propio de un hipotético observador situado en el lejano infinito de la Tierra y, por este motivo, es decir, para poder materializar un tiempo coordenado, es por el que se modifican estas métricas mediante las dos transformaciones que detallamos a continuación [7]:

La primera transformación viene dada por:

$$\begin{aligned}x^1 &= \cos(\omega y^4) y^1 - \operatorname{sen}(\omega y^4) y^2, \\x^2 &= \operatorname{sen}(\omega y^4) y^1 + \cos(\omega y^4) y^2, \\x^3 &= y^3, \\x^4 &= y^4,\end{aligned}\tag{2.7}$$

con $\omega = \omega_E$, y se usa para pasar de las coordenadas espaciales del sistema **ECI** a las del sistema en rotación **ECEF**. Así, aplicando esta transformación a la métrica (2.1) se tiene que en las nuevas coordenadas, y^i ,

$$\begin{aligned}ds^2 &= - \left[1 - 2\frac{m}{r} - \omega^2 \left[(y^1)^2 + (y^2)^2 \right] - 2\frac{m}{r}\omega^2 \left[(y^1)^2 + (y^2)^2 \right] \right] (dy^4)^2 \\&+ \left(1 + 2\frac{m}{r} \right) \left[2\omega (y^1 dy^2 - y^2 dy^1) dy^4 + (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 \right],\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde aparece

$$\phi(y^1, y^2, y^3) = -\frac{m}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 \left[(y^1)^2 + (y^2)^2 \right],\tag{2.9}$$

que es el conocido potencial gravífico, esto es, la suma del potencial gravitatorio y del potencial centrífugo. El geoide (supuesto aquí esférico) $\phi(y^1, y^2, y^3) = \phi_0$, que es una superficie equipotencial de ϕ , aparece entonces como elemento determinante, de hecho único, de la componente temporal de la métrica (2.8) ya que el término cruzado $2\frac{m}{r}\omega^2$, que es del orden de 10^{-21} , en la práctica se desprecia.

En esta métrica se puede observar que todos los relojes estacionarios en la Tierra (esto es, que satisfacen $dy^\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$) y que están en la misma superficie equipotencial (en particular, sobre el geoide) tienen el mismo tiempo propio $d\tau = ds$. De hecho, de acuerdo con (2.8) y para estos casos, estos tiempos vienen dados por la relación

$$ds^2 = - \left[1 - 2\frac{m}{r} - \omega^2 \left[(y^1)^2 + (y^2)^2 \right] \right] (dy^4)^2\tag{2.10}$$

de manera que, tomando el valor ϕ_0 del potencial sobre el geoide,

$$\phi_0 = -\frac{m}{r_E} - \frac{1}{2}\omega^2 r_E^2,\tag{2.11}$$

donde r_E es el radio de la Tierra, aparece la segunda transformación para el fin que se persigue:

$$\bar{t} = \bar{x}^4 = \bar{y}^4 = (1 + \phi_0) y^4 = (1 + \phi_0) x^4 \quad . \quad (2.12)$$

Esto es así porque, aplicando esta transformación a la métrica (2.8) (sin el término cruzado) que, como se ve, afecta únicamente a la coordenada temporal, resulta que

$$ds^2 = -[1 + 2(\phi - \phi_0)] (\bar{dy}^4)^2 + 2\omega \left(1 + 2\frac{m}{r} - \phi_0\right) (y^1 dy^2 - y^2 dy^1) \bar{dy}^4 \\ + \left(1 + 2\frac{m}{r}\right) \left[(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2\right] \quad , \quad (2.13)$$

con lo que se obtiene la métrica del espacio-tiempo en la vecindad de la Tierra asociada al sistema **ECEF**, definitivamente con las dos siguientes propiedades: 1^a) los ejes espaciales giran con la Tierra, como es evidente por (2.7), y 2^a) para los puntos estacionarios ($dy^\alpha = 0$) sobre esta vecindad se tiene que

$$d\tau = ds = \sqrt{1 + 2(\phi - \phi_0)} \bar{dy}^4, \quad (2.14)$$

de manera que cuando estos puntos están sobre el geoide entonces, como en este caso $\phi - \phi_0 = 0$, de (2.13) resulta que

$$d\tau = \bar{dy}^4, \quad (2.15)$$

así que, al menos idealmente, cualquier reloj sobre el geoide (en este caso, la superficie de la Tierra) materializa el tiempo coordenado de esta última métrica, que es el tiempo llamado "tiempo GPS".

Finalmente, usando nuevamente la primera transformación en sentido inverso resulta que la nueva métrica

$$ds^2 = \left(1 + 2\frac{m}{r}\right) \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] - \left[1 - 2\left(\frac{m}{r} + \phi_0\right)\right] (\bar{dx}^4)^2 \quad (2.16)$$

se puede obviamente asociar, en primer lugar, al sistema **ECI**, igual que la (2.1), pero con la ventaja, frente a ésta, de que la nueva coordenada temporal tiene la misma interpretación física que la obtenida anteriormente, esto es, corresponde al tiempo propio de un observador situado sobre el geoide en reposo respecto del sistema **ECEF**. (Es importante observar que el reloj del observador ha de estar en reposo respecto de este sistema y no respecto del sistema **ECI**, porque si el observador estuviera en reposo respecto del sistema **ECI** ($dx^\alpha = 0$), entonces el tiempo propio de este observador no materializaría el tiempo coordenado de este último sistema ya que, en general, $-U \neq \phi_0$).

Lo mismo cabe decir para la métrica en coordenadas de curvatura (2.2): se pueden hacer sobre ellas las mismas transformaciones que hemos mostrado anteriormente. De hecho, las coordenadas isotrópicas, las armónicas y las de curvatura se engloban dentro de un conjunto de coordenadas para las cuales el tensor métrico de cualquier campo gravitatorio débil con simetría esférica se deduce de la expresión general que proporciona el formalismo postnewtoniano al dar valores concretos al parámetro ϵ que aparece en este formalismo en el primer orden de aproximación. Esta expresión general es (v., [58]):

$$ds^2 = \left[\delta_{\alpha\beta} + 2\frac{m}{r} \left((1 - \epsilon) \delta_{\alpha\beta} + \epsilon \frac{x^\alpha x^\beta}{r^2} \right) \right] dx^\alpha dx^\beta - \left(1 - 2\frac{m}{r} \right) dt^2, \quad (2.17)$$

de manera que para $\epsilon = 1$ se obtiene la métrica

$$ds^2 = \left[\delta_{\alpha\beta} + 2\frac{m}{r^3} x^\alpha x^\beta \right] dx^\alpha dx^\beta - \left(1 - 2\frac{m}{r} \right) dt^2, \quad (2.18)$$

que corresponde a la métrica en coordenadas de curvatura dada en (2.2), y para $\epsilon = 0$ se obtiene la métrica

$$ds^2 = \left[\delta_{\alpha\beta} + 2\frac{m}{r} \delta_{\alpha\beta} \right] dx^\alpha dx^\beta - \left(1 - 2\frac{m}{r} \right) dt^2, \quad (2.19)$$

que corresponde tanto a la métrica en coordenadas isotrópicas dada en (2.1) como a la métrica en coordenadas armónicas, ya que hasta el segundo orden de aproximación ambas coordenadas son indistinguibles. Naturalmente estas expresiones se pueden transformar en otras escritas en términos de las correspondientes “coordenadas esféricas” cuando se aplica en cada caso la transformación formal (2.3). Esto ya lo hemos hecho con las coordenadas isotrópicas y, ahora, para las coordenadas de curvatura resulta que la métrica (2.2) en la correspondiente “forma polar” es

$$ds^2 = \left(1 + 2\frac{m}{r} \right) dr^2 + r^2 d\sigma^2 - \left(1 - 2\frac{m}{r} \right) dt^2, \quad (2.20)$$

donde $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, que es la expresión dada en (2.6). Finalmente, cabe decir que se puede pasar de unas métricas a otras mediante la siguiente transformación:

$$x'^\alpha = \frac{r - m\epsilon}{r} x^\alpha, \quad r' = r - m\epsilon \quad \text{y} \quad t' = t, \quad (2.21)$$

donde x'^α , r' son las coordenadas armónicas (o isotrópicas para este orden de aproximación).

En particular, si $\epsilon = 1$ entonces

$$x'^\alpha = \frac{r - m}{r} x^\alpha, \quad r' = r - m \quad \text{y} \quad t' = t, \quad (2.22)$$

así que, como se puede ver a continuación, si se aplica esta transformación a (2.20) resulta que

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(1 + 2\frac{m}{r' + m}\right) dr'^2 + (r' + m)^2 d\sigma^2 - \left(1 - 2\frac{m}{r' + m}\right) dt'^2 \\
&= \left(1 + 2\frac{\frac{m}{r'}}{1 + \frac{m}{r'}}\right) dr'^2 + \left(1 + \frac{m}{r'}\right)^2 r'^2 d\sigma^2 - \left(1 - 2\frac{\frac{m}{r'}}{1 + \frac{m}{r'}}\right) dt'^2 \\
&= \left(1 + 2\frac{m}{r'} \left(1 + \frac{m}{r'}\right)^{-1}\right) dr'^2 + \left(1 + \frac{m}{r'}\right)^2 r'^2 d\sigma^2 - \\
&\quad \left(1 - 2\frac{m}{r'} \left(1 + \frac{m}{r'}\right)^{-1}\right) dt'^2 \\
&= \left(1 + 2\frac{m}{r'} \left(1 - \frac{m}{r'} + \dots\right)\right) dr'^2 + \left(1 + 2\frac{m}{r'}\right) r'^2 d\sigma^2 - \\
&\quad \left(1 - 2\frac{m}{r'} \left(1 - \frac{m}{r'} + \dots\right)\right) dt'^2 \\
&= \left(1 + 2\frac{m}{r'}\right) dr'^2 + \left(1 + 2\frac{m}{r'}\right) r'^2 d\sigma^2 - \left(1 - 2\frac{m}{r'}\right) dt'^2 \\
&= \left(1 + 2\frac{m}{r'}\right) [dr'^2 + r'^2 d\sigma^2] - \left(1 - 2\frac{m}{r'}\right) dt'^2
\end{aligned}$$

o, en “forma cartesiana”,

$$ds^2 = \left(1 + 2\frac{m}{r'}\right) \delta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta - \left(1 - 2\frac{m}{r'}\right) dt'^2 \quad (2.23)$$

que es la métrica en (2.19).

Esto es lo que hace que sea irrelevante utilizar unas coordenadas u otras tanto en el problema de Navegación como en el de Geolocalización porque, sea con unas o con otras, la descripción de los efectos de segundo orden mediante la función de universo es siempre la misma. Por esta razón, y por otras de tipo práctico que se verán más adelante, la métrica básica que usamos es la que reseñamos en (2.2).

2.1. Definición general y propiedades

A continuación, damos la definición de la función de universo de Synge [1].

Dado un espacio-tiempo arbitrario con métrica g_{ij} , si $P_1(x^{i_1})$ y $P_2(x^{j_2})$ son dos sucesos cualesquiera que están unidos por una única geodésica Γ de ecuaciones paramétricas $x^i = x^i(\mu)$ donde μ es un parámetro afín, $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$, la función de universo para este espacio-tiempo se define mediante la integral:

$$\Omega(P_1, P_2) = \Omega(x^{i_1}, x^{j_2}) = \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_0) \int_{\mu_0}^{\mu_1} g_{ij} U^i U^j d\mu, \quad (2.24)$$

donde $U^i = \frac{dx^i}{d\mu}$.

Ahora bien, debido a que los sucesos P_1 y P_2 están unidos por una única geodésica, entonces Ω es función sólo de las ocho variables x^{i_1} y x^{j_2} de los dos sucesos $P_1(x^{i_1})$ y $P_2(x^{j_2})$ respectivamente y, por lo tanto, tiene un valor independiente del parámetro μ elegido.

Por otro lado, como Γ es geodésica, entonces $\frac{\delta U^i}{\delta \mu} = 0$, es decir, $g_{ij} U^i U^j$ es constante a lo largo de Γ , de manera que

$$\Omega(P_1, P_2) = \Omega(x^{i_1}, x^{j_2}) = \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_0)^2 g_{ij} U^i U^j, \quad (2.25)$$

con esta última expresión calculada en cualquier punto de Γ .

Además, se puede elegir un parámetro $\bar{\mu}$ de modo que los valores extremos correspondan a $\bar{\mu}_0 = 0$ y $\bar{\mu}_1 = 1$, y entonces se tiene que

$$\Omega(P_1, P_2) = \Omega(x^{i_1}, x^{j_2}) = \frac{1}{2} g_{ij} U^i U^j \quad (2.26)$$

con esta última expresión calculada en cualquier punto de Γ .

Por lo tanto, para interpretar la función Ω se puede observar que, para cualquier curva no nula $x^i = x^i(\mu)$ con $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$, es posible seleccionar como parámetro su longitud de arco, s , que se define mediante la relación

$$\mu = \mu_0 + \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{L} s, \text{ con } 0 \leq s \leq L \quad (2.27)$$

donde $L = \int_{P_1}^{P_2} ds$ es la longitud de Γ . Y para este parámetro se tiene que

$$\begin{aligned}
\Omega(P_1, P_2) &= \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_0) \int_{\mu_0}^{\mu_1} g_{ij} U^i U^j d\mu \\
&= \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_0) \int_{\mu_0}^{\mu_1} g_{ij} \frac{dx^i}{d\mu} \frac{dx^j}{d\mu} d\mu \\
&= \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_0) \int_0^L g_{ij} \frac{L^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \frac{(\mu_1 - \mu_0)}{L} ds \\
&= \frac{1}{2} L \int_0^L g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} ds \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon L^2
\end{aligned} \tag{2.28}$$

donde, en este caso, $\varepsilon = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = \pm 1$.

Así pues, aparte del factor $\varepsilon (= \pm 1)$, la función de universo resulta ser, como ya se dijo, la mitad del cuadrado de la medida de la geodésica que une los puntos P_1 y P_2 , y es por esta razón por la que contiene toda la información de la geometría intrínseca del espacio-tiempo caracterizado por g_{ij} . En particular, al ser $\Omega(P_1, P_2)$ invariante para cada espacio-tiempo tenemos, en definitiva, que su valor es independiente de las expresiones concretas de la métrica g_{ij} del espacio-tiempo y, en particular, de las que vamos a considerar, que son, primero, (2.1) y, después, (2.2).

Para ver la información más inmediata que se puede conseguir a través de esta función consideramos el espacio-tiempo en ausencia de masas, es decir, el espacio-tiempo minkowskiano de la Relatividad Especial (RE). Entonces es inmediato ver que

$$\Omega(P_1, P_2) = \frac{1}{2} \eta_{ij} (x^{i'} - x^i) (x^{j'} - x^j), \tag{2.29}$$

donde $g_{ij} = \eta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ o, bien, más explícitamente, que

$$\begin{aligned}
\Omega(P_1, P_2) &= \frac{1}{2} \left[|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2 - (t' - t)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(x^{1'} - x^1)^2 + (x^{2'} - x^2)^2 + (x^{3'} - x^3)^2 - (t' - t)^2 \right],
\end{aligned} \tag{2.30}$$

con lo que se ve claramente que en cualquier entorno de un suceso P de coordenadas (x_1, x_2, x_3, t) , aparecen las famosas tres regiones cuadridimensionales que son las

que están formadas por los sucesos $\bar{P}(\bar{x}^\alpha, \bar{t})$ que satisfacen, respectivamente, las condiciones: (a) $\Omega(P, \bar{P}) < 0$, $(\bar{t} < t)$; (b) $\Omega(P, \bar{P}) < 0$, $(\bar{t} > t)$ y (c) $\Omega(P, \bar{P}) > 0$, las cuales están separadas por el espacio tridimensional (d) $\Omega(P, \bar{P}) = 0$, que es el espacio conocido como cono de luz, o cono nulo, al que nos hemos referido anteriormente.

Pues bien, como se sabe, las regiones (a) y (b) se denominan, respectivamente, el pasado y futuro de P porque cualquier partícula material que incluya a P en su historia (es decir, en su línea de universo) necesariamente tiene que estar dentro de estas regiones. Por ejemplo (v. *Fig.2.1*), P' está en el futuro de P porque puede haber una partícula material a la que corresponda la línea de universo de tipo temporal que, pasando primero por P , pase después por P' (ya que $t' - t > 0$). Así, la partícula experimentaría, primero, el suceso P y, después, el suceso P' .

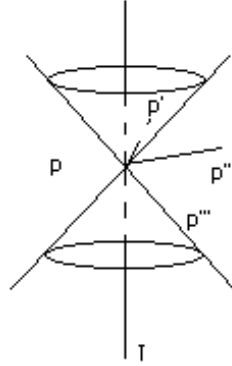


Fig.2.1

Pero ninguna partícula material que experimente el suceso P puede experimentar el suceso P'' ya que su línea de universo no puede traspasar el cono nulo en P . En efecto, si esto ocurriera, entonces la partícula tendría que viajar a una velocidad mayor que c , lo cual, de acuerdo con la RE, es imposible.

Por otro lado, como se puede ver a partir de la expresión (d), cualquier suceso P''' en el cono nulo ha de satisfacer la relación

$$\Omega(P, P''') = 0, \quad (2.31)$$

de donde se deduce que el suceso P''' sólo se puede alcanzar desde P con una partícula que viaje a velocidad c , lo que significa que esta partícula tiene que corresponder a una señal electromagnética.

Como se sabe, a la región inaccesible a cualquier partícula material que experimente el suceso P se le denomina el presente de P . Pues bien, en general, para un espacio-tiempo arbitrario la clasificación anterior de cualquier entorno de cualquier suceso P , se puede hacer de la misma manera ($\Omega(P, \bar{P}) < 0$, $\Omega(P, \bar{P}) > 0$ y $\Omega(P, \bar{P}) = 0$), ya que Ω es covariante, si bien hay que tener presente que en tal situación, al haber masas presentes, las correspondientes regiones caracterizadas por estas condiciones son globalmente riemannianas, o “curvas”, y no minkowskianas como en el caso anterior, (salvo localmente, ya que cualquier espacio-tiempo que sea solución de las ecuaciones de campo de Einstein es obviamente minkowskiano localmente, como se puede ver, por ejemplo, en las métricas (2.1), (2.2), (2.5) y (2.6) (v. *Fig.2.2*)).

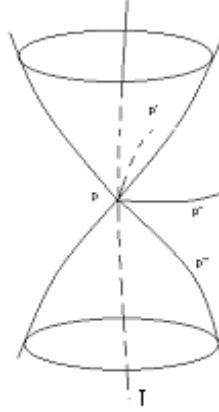


Fig.2.2

2.2. La función de universo para el campo gravitatorio terrestre

2.2.1. Cálculo en coordenadas cartesianas

Para comenzar el cálculo de la función de universo en estas coordenadas suponemos que O es el origen del sistema ECI (es decir, el centro de masas de la Tierra) y que P_1 y P_2 son dos sucesos arbitrarios del espacio-tiempo que rodea a la Tierra.

Entonces, puesto que la métrica (2.2) tiene la forma general

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \eta_{ij} + \gamma_{ij} \\ \eta_{ij} &= \text{diag}(1, 1, 1, -1) \end{aligned} \quad (2.32)$$

(donde las γ 's son pequeñas) se puede asegurar que todas las coordenadas (y en particular las coordenadas de curvatura, x^i , que son las que aparecen en (2.2)) son, en primera aproximación, coordenadas cartesianas del espacio euclídeo cuatridimensional que aproxima al que rodea a la Tierra. De esta forma P_1 y P_2 aparecen conectados en este espacio euclídeo, por un lado, por la geodésica Γ de ecuaciones

$$\frac{d^2 x^i}{d\mu^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\mu} \frac{dx^k}{d\mu} = 0 \quad (2.33)$$

donde Γ_{jk}^i son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica en (2.2) y, por otro, por la recta L que los une:

$$x^i = (1 - \mu) x^{i_1} + \mu x^{i_2}, \quad (2.34)$$

donde $0 \leq \mu \leq 1$ (v. *Fig.2.3*).

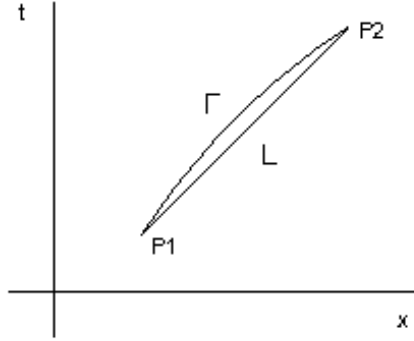


Fig.2.3

Ahora bien, como de acuerdo con (2.32) Γ y L están próximas (de hecho, Γ es una extremal del espacio-tiempo, de forma que L se puede considerar como una variación de Γ (v. *Fig.2.3*)) resulta que

$$\int_{\Gamma} g_{ij} \frac{dx^j}{d\mu} \frac{dx^k}{d\mu} d\mu \simeq \int_L g_{ij} \frac{dx^j}{d\mu} \frac{dx^k}{d\mu} d\mu. \quad (2.35)$$

Por lo tanto, a partir de la definición (2.24) resulta que

$$\begin{aligned}
\Omega(P_1, P_2) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} g_{ij} \frac{dx^j}{d\mu} \frac{dx^k}{d\mu} d\mu \\
&\simeq \frac{1}{2} \int_L g_{ij} \frac{dx^j}{d\mu} \frac{dx^k}{d\mu} d\mu \\
&= \frac{1}{2} \Delta x^i \Delta x^j \int_L g_{ij} d\mu,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

donde

$$\Delta x^i = x^{i_2} - x^{i_1}. \tag{2.37}$$

Así que, teniendo en cuenta (2.32), resulta que para todas las métricas de la forma (2.32) la función de universo viene dada (despreciando los términos de orden superior) por la siguiente expresión:

$$\Omega(P_1, P_2) = \frac{1}{2} \eta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j + \frac{1}{2} \Delta x^i \Delta x^j \int_L \gamma_{ij} d\mu, \tag{2.38}$$

donde, como se ve, el primer sumando corresponde a la función de universo del espacio-tiempo minkowskiano que se muestra en (2.29).

Ahora, para obtener el valor de las integrales que están en esta expresión utilizamos la métrica en (2.2). Esta métrica corresponde, como se ha dicho, a la aproximación postnewtoniana del campo exterior de Schwarzschild para el campo terrestre. En efecto, ya que este campo viene dado por (v., [1]):

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\sigma^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 \tag{2.39}$$

donde m es la masa de la tierra, y r es la coordenada radial de curvatura, resulta que cuando esta métrica se pasa a forma cartesiana mediante la transformación en (2.3) se tiene que

$$ds^2 = dx^\alpha dx^\alpha + \frac{\frac{2m}{r^3}}{1 - \frac{2m}{r}} (x^\alpha x^\beta dx^\alpha dx^\beta) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2, \quad r^2 = x^\alpha x^\alpha, \tag{2.40}$$

de manera que al eliminar los términos $\frac{m^2}{r^2}$ queda en la forma que necesitamos, esto es:

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \gamma_{ij},$$

con

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2mx^\alpha x^\beta}{r^3} = 2m \left(r^{-1} \delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha\beta} \right), \\ \gamma_{\alpha 4} &= 0 \quad \gamma_{44} = \frac{2m}{r},\end{aligned}\tag{2.41}$$

con lo que se tiene la métrica dada en (2.2).

Por lo tanto, la función de universo en la aproximación postnewtoniana para el campo terrestre escrita en coordenadas cartesianas es

$$\Omega(P_1, P_2) = \frac{1}{2} (\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2) + m \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \int_0^1 \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3} d\omega + m (\Delta t)^2 \int_0^1 \frac{d\omega}{r}.\tag{2.42}$$

Y ya que los valores de las integrales en (2.42) vienen dados por (v., [17])

$$m \Delta x^\alpha \Delta x^\beta \int_0^1 \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3} d\omega = m |\Delta x^\alpha| \left(\log \left(\frac{tg \frac{\theta_1}{2}}{tg \frac{\theta_2}{2}} \right) + \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right)\tag{2.43}$$

y

$$m (\Delta t)^2 \int_0^1 \frac{d\omega}{r} = \frac{m (\Delta t)^2}{|\Delta x^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta_1}{2}}{tg \frac{\theta_2}{2}} \right),\tag{2.44}$$

donde $\Delta x^\alpha = x^{\alpha_2} - x^{\alpha_1}$, $\Delta t = t_2 - t_1$, y θ_1 y θ_2 son los ángulos euclídeos que forman x^{α_1} y x^{α_2} con Δx^α respectivamente, tenemos finalmente que la función de universo para el entorno de la Tierra queda en estas coordenadas en la forma

$$\begin{aligned}\Omega(P_1, P_2) &= \frac{1}{2} (\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2) + \\ &m |\Delta x^\alpha| \left(\log \left(\frac{tg \frac{\theta_1}{2}}{tg \frac{\theta_2}{2}} \right) + \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right) + \\ &\frac{m (\Delta t)^2}{|\Delta x^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta_1}{2}}{tg \frac{\theta_2}{2}} \right).\end{aligned}\tag{2.45}$$

Alternativamente, si tenemos en cuenta que

$$\left(\frac{tg \frac{\theta_1}{2}}{tg \frac{\theta_2}{2}} \right) = \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}}\tag{2.46}$$

y que

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{r_1^2 - d^2}}{r_1}, \quad \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_2}, \quad (2.47)$$

donde $r_1 = |x^{\alpha 1}|$, $r_2 = |x^{\alpha 2}|$ y d es la distancia euclídea del punto más próximo de la trayectoria, C , correspondiente a Γ al centro del sistema ECI, la ecuación (2.45) se puede escribir en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \Omega(P_1, P_2) = & \frac{1}{2} (\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2) + m |\Delta x^\alpha| \left[\log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{r_1^2 - d^2}}{r_1} - \frac{\sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_2} \right] + \\ & \frac{m (\Delta t)^2}{|\Delta x^\alpha|} \log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

2.2.2. Cálculo en coordenadas isotrópicas

La función de universo se puede escribir también en coordenadas isotrópicas. Para obtener esta función en estas coordenadas se puede proceder de dos maneras:

La primera, al tener en cuenta que el campo postnewtoniano de Schwarzschild viene dado en estas coordenadas, (x'^α, t') , por (2.23), esto es, por

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2m}{r'} \right) dx'^\alpha dx'^\alpha - \left(1 - \frac{2m}{r'} \right) (dt')^2, \quad (2.49)$$

donde $r' = |x'^\alpha|$, y $t' = t$ resulta que, en este caso,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2m}{r'} \delta_{\alpha\beta}, \quad \gamma_{00} = \frac{2m}{r'}. \quad (2.50)$$

Y entonces, igual que para obtener la integral (2.44), se obtiene de manera análoga que

$$\int_0^1 \frac{d\omega}{r'} = \frac{1}{|\Delta x'^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta'_1}{2}}{tg \frac{\theta'_2}{2}} \right),$$

con lo que tenemos que

$$\Omega(P_1, P_2) = \frac{1}{2} (\Delta x'^\alpha \Delta x'^\alpha - (\Delta t')^2) + m |\Delta x'^\alpha| \log \left(\frac{tg \frac{\theta'_1}{2}}{tg \frac{\theta'_2}{2}} \right) +$$

$$\frac{m (\Delta t')^2}{|\Delta x'^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta'_1}{2}}{tg \frac{\theta'_2}{2}} \right). \quad (2.51)$$

Y ahora, teniendo en cuenta expresiones análogas a las que hay en (2.46) y (2.47), resulta también que:

$$\begin{aligned} \Omega(P_1, P_2) = & \frac{1}{2} \left(\Delta x'^\alpha \Delta x'^\alpha - (\Delta t')^2 \right) + m |\Delta x'^\alpha| \log \left(\frac{r'_2 + \sqrt{r'^2_2 - d'^2}}{r'_1 + \sqrt{r'^2_1 - d'^2}} \right) + \\ & \frac{m (\Delta t')^2}{|\Delta x'^\alpha|} \log \left(\frac{r'_2 + \sqrt{r'^2_2 - d'^2}}{r'_1 + \sqrt{r'^2_1 - d'^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde d' es la distancia del punto más próximo de C al centro del ECI en estas coordenadas. Es interesante observar que, debido a la elección de estas coordenadas, los términos en cosenos que aparecen en la ecuación (2.45) ahora desaparecen en (2.51) y en (2.52).

La segunda manera para obtener la función en estas coordenadas consiste en aplicar la transformación citada anteriormente, que es

$$x^\alpha = \left(1 + \frac{m}{r'} \right) x'^\alpha, \quad r = r' + m, \quad t' = t, \quad (2.53)$$

a la ecuación (2.45) (v.(2.21)), de manera que, operando, se ve que las primas de los términos logarítmicos en (2.51) y (2.52) se pueden suprimir, ya que estos términos difieren de los correspondientes en la ecuación (2.45) en un orden superior al postnewtoniano. Por eso, además de las formas (2.51) y (2.52) también se puede escribir una forma mixta, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} \Omega(P_1, P_2) = & \frac{1}{2} \left(\Delta x'^\alpha \Delta x'^\alpha - (\Delta t')^2 \right) + m |\Delta x'^\alpha| \log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r^2_2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r^2_1 - d^2}} \right) + \\ & \frac{m (\Delta t')^2}{|\Delta x'^\alpha|} \log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r^2_2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r^2_1 - d^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.2.3. Cálculo en coordenadas de curvatura (estandar)

Por supuesto, los mismos procedimientos se pueden usar para obtener la función de universo en coordenadas de curvatura (estandar). Por ejemplo, a partir de (2.51) y (2.52) y utilizando la transformación

$$x'^\alpha = \left(1 + \frac{m}{r''} \right) x''^\alpha, \quad r' = r'' + m, \quad t'' = t \quad (2.55)$$

se obtienen las dos formas de la función de universo en estas coordenadas. Una, que es:

$$\begin{aligned}\Omega(P_1, P_2) &= \frac{1}{2} \left(\Delta x''^\alpha \Delta x''_\alpha - (\Delta t'')^2 \right) + \\ &\quad m |\Delta x''^\alpha| \left(1 + \log \left(\frac{tg \frac{\theta_1''}{2}}{tg \frac{\theta_2''}{2}} \right) \right) + \\ &\quad \frac{m (\Delta t'')^2}{|\Delta x''^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta_1''}{2}}{tg \frac{\theta_2''}{2}} \right)\end{aligned}\tag{2.56}$$

y, la otra, que es

$$\begin{aligned}\Omega(P_1, P_2) &= \frac{1}{2} \left(\Delta x''^\alpha \Delta x''_\alpha - (\Delta t'')^2 \right) + \\ &\quad m |\Delta x''^\alpha| \left(1 + \log \left(\frac{r_2'' + \sqrt{r_2''^2 - d''^2}}{r_1'' + \sqrt{r_1''^2 - d''^2}} \right) \right) + \\ &\quad \frac{m (\Delta t'')^2}{|\Delta x''^\alpha|} \log \left(\frac{r_2'' + \sqrt{r_2''^2 - d''^2}}{r_1'' + \sqrt{r_1''^2 - d''^2}} \right),\end{aligned}\tag{2.57}$$

donde ahora d'' es la distancia en coordenadas de curvatura del punto más próximo de C al centro del sistema ECI.

2.2.4. Puntos alineados

Como se ve en (2.45), (2.51) y (2.56), los términos logarítmicos hacen que en el caso de que P_1 y P_2 estén alineados con el origen del sistema ECI, las expresiones de la función de universo degeneren. Por esta razón este caso hay que tratarlo autónomamente.

Consideremos, pues, el triángulo OP_1P_2 , de manera que h es pequeña comparado con a y b (v. *Fig.2.4*). Entonces se tiene, por un lado, que

$$\cos \theta_2 = \frac{b}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}},\tag{2.58}$$

es decir, que

$$\cos \theta_2 \approx 1 - \frac{h^2}{2b^2} \quad (2.59)$$

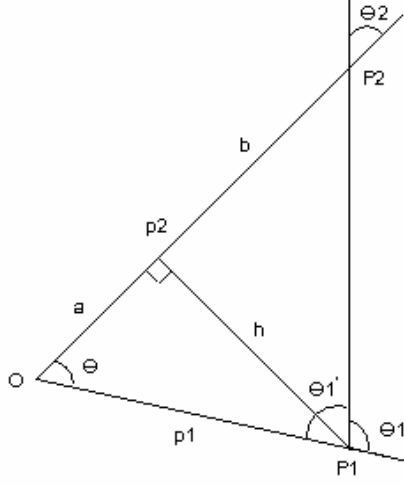


Fig.2.4

y, por otro, que

$$\begin{aligned} \cos \theta'_1 &= \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 + |\overrightarrow{P_1 P_2}|^2}{2\rho_1 |\overrightarrow{P_1 P_2}|} = \frac{(a^2 + h^2) - (a+b)^2 + (b^2 + h^2)}{2\sqrt{a^2 + h^2}\sqrt{b^2 + h^2}} \\ &= \frac{h^2 - ab}{ab\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}} \approx \left(-1 + \frac{h^2}{ab}\right) \left(1 - \frac{h^2}{2a^2}\right) \left(1 - \frac{h^2}{2b^2}\right) \\ &\approx \left(-1 + \frac{h^2}{ab}\right) \left(1 - h^2 \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)\right) \approx -1 + h^2 \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{2b^2}\right) , \end{aligned} \quad (2.60)$$

con lo que

$$\cos \theta'_1 \approx - \left(-1 + \frac{(a+b)^2}{2a^2 b^2} h^2 \right) . \quad (2.61)$$

Además

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta_2 &= \frac{h}{\left| \overrightarrow{P_1 P_2} \right|} = \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{h}{b\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}} \\ &\approx \frac{h}{b} \left(1 - \frac{h^2}{2b^2} \right), \end{aligned} \quad (2.62)$$

con lo que

$$\operatorname{sen} \theta_2 \approx \frac{h}{b} \quad (2.63)$$

y, también,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta'_1 &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \operatorname{sen} \theta_2 \approx \frac{(a+b)h}{b\sqrt{a^2 + h^2}} \\ &\approx \frac{(a+b)h}{ab\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}} \approx \frac{(a+b)h}{ab} \left(1 - \frac{h^2}{2a^2} \right), \end{aligned} \quad (2.64)$$

con lo que

$$\operatorname{sen} \theta'_1 \approx \frac{a+b}{ab} h. \quad (2.65)$$

Así que, por un lado,

$$\cot g \left(\frac{\theta'_1}{2} \right) = \frac{1 + \cos \theta'_1}{\operatorname{sen} \theta'_1} \approx \frac{\frac{(a+b)^2}{2a^2b^2} h^2}{\frac{a+b}{ab} h}, \quad (2.66)$$

con lo que

$$\cot g \left(\frac{\theta'_1}{2} \right) \approx \frac{a+b}{2ab} h \quad (2.67)$$

y, por otro,

$$tg \left(\frac{\theta_2}{2} \right) \approx \frac{\frac{h}{b}}{2 - \frac{h^2}{2b^2}}, \quad (2.68)$$

con lo que

$$tg \left(\frac{\theta_2}{2} \right) \approx \frac{2bh}{4b^2 - h^2}. \quad (2.69)$$

Y como también tenemos que

$$\theta_1 = \pi - \theta'_1 \quad (2.70)$$

entonces

$$tg \left(\frac{\theta_1}{2} \right) = \cot g \left(\frac{\theta'_1}{2} \right), \quad (2.71)$$

así que, a partir de la expresión general (2.45), y teniendo en cuenta (2.67) y (2.69), al hacer tender h a 0 resulta que

$$\Omega(P_1, P_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \eta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j + m \left[|x_2^\alpha - x_1^\alpha| + \frac{(\Delta t)^2}{|x_2 - x_1|} \right] \log \left(\frac{\frac{a+b}{2ab} h}{\frac{2b}{4b^2 - h^2} h} \right) + \right.$$

$$\left. m |x_2^\alpha - x_1^\alpha| (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \right\},$$

o, lo que es lo mismo, que

$$\Omega(P_1, P_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \eta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j + m \left[|x_2^\alpha - x_1^\alpha| + \frac{(\Delta t)^2}{|x_2^\alpha - x_1^\alpha|} \right] \log \left(\frac{\frac{a+b}{2ab} h}{\frac{2b}{4b^2 - h^2} h} \right) \right\} =$$

$$\frac{1}{2} \eta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j + m \left[|x_2^\alpha - x_1^\alpha| + \frac{(\Delta t)^2}{|x_2^\alpha - x_1^\alpha|} \right] \log \left(\frac{(a+b) 4b^2}{4ab^2} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \eta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j + m \left[|x_2^\alpha - x_1^\alpha| + \frac{(\Delta t)^2}{|x_2^\alpha - x_1^\alpha|} \right] \log \left(\frac{a+b}{a} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \eta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j + m \left[|x_2^\alpha - x_1^\alpha| + \frac{(\Delta t)^2}{|x_2^\alpha - x_1^\alpha|} \right] \log \frac{|x_2^\alpha|}{|x_1^\alpha|}, \quad (2.72)$$

que es la expresión adecuada para este caso.

2.3. La ecuación del tiempo

Se denomina así a la función que determina el tiempo que tarda una señal electromagnética desde que parte de un determinado suceso hasta que llega a otro. En el modelo postnewtoniano del entorno de la Tierra esta función incluye, como único término diferenciador de la función clásica, el efecto conocido como “time-delay” de Shapiro. Naturalmente, como ocurre con cualquier función escalar, este efecto es invariante, pero aparece escrito de diferentes maneras, según las coordenadas que se utilicen. Pues bien, a continuación vamos a deducir esta función en coordenadas cartesianas por las razones dichas en la Introducción, al tiempo que mostramos que la correspondiente expresión es bastante más fácil de encontrar cuando se utiliza la técnica de la función de universo de Synge que cuando se utilizan otras técnicas, como la de Soffel, en la que se utilizan coordenadas isotrópicas [11] y la de Weinberg, en la que se utilizan coordenadas de curvatura [20].

2.3.1. Las técnicas de Soffel y de Weinberg

a) La técnica de Soffel

En esta técnica se utiliza la cuarta ecuación en (2.33), que es

$$\frac{d^2 t}{d\mu^2} + \Gamma_{jk}^4 \frac{dx^j}{d\mu} \frac{dx^k}{d\mu} = 0, \quad (2.73)$$

para escribir las tres primeras ecuaciones en la forma

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \left(\Gamma_{jk}^\alpha - \Gamma_{jk}^4 \frac{dx^\alpha}{dt} \right) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (2.74)$$

junto con las condiciones

$$g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad (2.75)$$

$$\frac{dx^i}{dt} = O(c) \quad (2.76)$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = O(1) \quad (2.77)$$

que reflejan el hecho de que la geodésica en consideración es nula.

A continuación, se tiene en cuenta que para el campo terrestre

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \gamma_{ij}$$

y, entonces, las ecuaciones en (2.73), junto con (2.74)-(2.77), dan lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{x}^\alpha = \frac{1}{2}\gamma_{44,\alpha} - \gamma_{44,\beta}\dot{x}^\beta\dot{x}^\alpha - \left(\gamma_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2}\gamma_{\beta\gamma,\alpha}\right)\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma,$$

(donde los puntos significan derivadas respecto de t) de manera que cuando, en particular, γ_{ij} corresponde a la métrica isotrópica en la forma cartesiana dada en (2.23) ($t' = t$) se tiene que las ecuaciones a integrar son ($c = 1$):

$$\ddot{x}^{\prime\alpha} = \left(\frac{m}{r'}\right)_{,\alpha} \left(1 + \dot{x}^{\prime\beta}\dot{x}^{\prime\beta}\right) - 4\left(\frac{m}{r'}\right)_{,\gamma} \dot{x}^{\prime\gamma}\dot{x}^{\prime\alpha}.$$

Se trata, pues, de integrar estas ecuaciones sabiendo que la integral primera viene dada por

$$\dot{x}^{\prime\alpha}\dot{x}^{\prime\alpha} = 1 - \frac{4m}{r'}.$$

Ahora, como Γ y L están próximas, en esta técnica se hace la clásica descomposición de la trayectoria en dos partes: la parte newtoniana, x_N^α , y la pequeña perturbación, x_P^α :

$$x^{\prime\alpha} = x_N^{\prime\alpha} + x_P^{\prime\alpha},$$

de manera que, con las condiciones iniciales

$$x^{\prime\alpha}(t_1) = x_1^{\prime\alpha}; \dot{x}^{\prime\alpha}(t_1) = cn^\alpha,$$

es evidente, por un lado, que

$$x_N^{\prime\alpha} = x_{N_1}^{\prime\alpha} + n^\alpha(t - t_1)$$

y, por otro, que

$$\ddot{x}_P^{\prime\alpha} = \left(\frac{m}{r'}\right)_{,\alpha} (1 + n^\beta n^\beta) - 4\left(\frac{m}{r'}\right)_{,\gamma} n^\gamma n^\alpha.$$

A continuación, se descompone $x_P^{\prime\alpha}$ nuevamente en dos partes: una es la componente paralela a $x_N^{\prime\alpha}$ y, la otra, es la componente transversal:

$$x_P^{\prime\alpha} = x_{P||}^{\prime\alpha} + x_{P\perp}^{\prime\alpha},$$

$$x_{P||}^{\prime\alpha} = (\dot{x}_P^\gamma \cdot n^\gamma) n^\alpha,$$

y con esto se tiene que

$$\ddot{x}_{P\perp}^{\prime\alpha} = \ddot{x}_P^{\prime\alpha} - (\ddot{x}_P^\gamma \cdot n^\gamma) n^\alpha,$$

o, bien, que

$$\ddot{x}_{P_{\perp}}^{\prime\alpha} = -2 \left[\left(\frac{m}{r'} \right)_{,\alpha} - \left(\frac{m}{r'} \right)_{,\gamma} n^{\gamma} n^{\alpha} \right].$$

Así que, finalmente, tenemos la ecuación

$$\ddot{x}_{P_{\perp}}^{\prime\alpha} = \frac{-2m}{\left| x_1^{\beta} + n^{\beta} (t - t_1) \right|^3} \left[x_1^{\prime\alpha} - x_1^{\prime\gamma} n^{\gamma} n^{\alpha} \right] = \frac{-2m d^{\prime\alpha}}{\left| x_1^{\prime\beta} + n^{\beta} (t - t_1) \right|^3}, \quad (2.78)$$

donde $d^{\prime\alpha} = x_1^{\prime\alpha} - x_1^{\prime\gamma} n^{\gamma} n^{\alpha}$. Pues bien, integrando (2.78) y teniendo en cuenta que

$$x^{\prime\alpha} = x_N^{\prime\alpha} + x_{P_{\parallel}}^{\prime\alpha} + x_{P_{\perp}}^{\prime\alpha}$$

se obtiene que

$$x^{\prime\alpha} = x_1^{\prime\alpha} + n^{\alpha} (t - t_1) - 2m n^{\alpha} L \left(\frac{r'_N + \sqrt{(r'_N)^2 - (d')^2}}{r'_{N_1} + \sqrt{(r'_{N_1})^2 - (d')^2}} \right) - 2m \frac{d^{\prime\alpha}}{|d^{\prime\alpha}|^2} \left(|x^{\prime\alpha}| - \frac{x_N^{\prime\alpha} \cdot x_{N_1}^{\prime\alpha}}{|x_{N_1}^{\prime\alpha}|} \right),$$

de donde se deduce, en primer orden, que

$$x^{\prime\alpha} - x_1^{\prime\alpha} = n^{\alpha} (t - t_1)$$

o, lo que es lo mismo, que

$$(x^{\prime\alpha} - x_1^{\prime\alpha}) n^{\alpha} = t - t_1.$$

Así que, finalmente, en el orden postnewtoniano, tenemos que

$$t - t_1 = (x^{\prime\alpha} - x_1^{\prime\alpha}) n^{\alpha} + 2mL \left(\frac{r'_N + \sqrt{(r'_N)^2 - (d')^2}}{r'_{N_1} + \sqrt{(r'_{N_1})^2 - (d')^2}} \right),$$

de manera que el tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ que tarda la señal en ir de $x_1^{\prime\alpha}$ a $x_2^{\prime\alpha}$ viene dado por

$$\Delta t = (x_2^{\prime\alpha} - x_1^{\prime\alpha}) n^{\alpha} + 2mL \left(\frac{r'_{N_2} + \sqrt{(r'_{N_2})^2 - (d')^2}}{r'_{N_1} + \sqrt{(r'_{N_1})^2 - (d')^2}} \right), \quad (2.79)$$

donde el tiempo que tarda la señal de acuerdo con el modelo newtoniano viene dado por el primer término de esta solución y el efecto “time-delay” de Shapiro corresponde al segundo término.

b) La técnica de Weinberg

En esta técnica se usan las coordenadas estandar, de manera que el problema se plantea en términos de encontrar el tiempo que tarda una señal electromagnética para ir de un punto con coordenadas $r'' = r_1'', \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \varphi_1$, a un segundo punto con coordenadas estandar $r'' = r_2'', \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \varphi_2$, y para ello se integra también la ecuación geodésica en (2.33), aunque de distinta manera.

Así, los símbolos de Christoffel que se usan en este método corresponden a la forma general exacta de la métrica de Schwarzschild para el entorno exterior de la Tierra, que es, como se ha dicho en (2.39):

$$ds^2 = \frac{dr''^2}{\left(1 - \frac{2m}{r''}\right)} + r''^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2m}{r''}\right) (dt)^2, \quad (2.80)$$

de manera que, como en todos los procedimientos clásicos, la solución exacta se considera dada al proporcionar t en función de r'' a falta de una cuadratura. Entonces, para resolver esta cuadratura el primer coeficiente de esta métrica se aproxima por el valor $1 + \frac{2m}{r''}$, como habitualmente se hace para pasar a la aproximación débil.

Así que el planteamiento de esta técnica es el siguiente: la ecuación general de cualquier trayectoria es

$$\frac{A(r'')}{B^2(r'')} \left(\frac{dr''}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{r''^2} - \frac{1}{B(r'')} = -E, \quad (2.81)$$

y como en nuestro caso $E = 0$ (ya que la trayectoria corresponde a la de una señal electromagnética) y $\left(\frac{dr''}{dt}\right)^2 = 0$ en el punto de máxima aproximación de la señal al centro del sistema ECI (es decir, en el que $r'' = r_0'' = d''$) se tiene que

$$J^2 = \frac{r_0''^2}{B(r_0'')} \quad (2.82)$$

con lo que la ecuación a integrar es

$$\frac{A(r'')}{B^2(r'')} \left(\frac{dr''}{dt}\right)^2 + \left(\frac{r_0''}{r''}\right)^2 B^{-1}(r_0'') - B^{-1}(r'') = 0 \quad (2.83)$$

y el resultado es

$$t(r'', r_0'') = \int_{r_0''}^{r''} \left(\frac{A(r'')/B(r'')}{\left[1 - \frac{B(r'')}{B(r_0'')} \left(\frac{r_0''}{r''}\right)^2\right]} \right)^{1/2} dr''. \quad (2.84)$$

Por lo tanto, el tiempo total requerido para ir del punto 1 al 2 (para $|\varphi_1 - \varphi_2| > \frac{\pi}{2}$) es

$$t_{12} = t(r_1'', r_0'') + t(r_2'', r_0''). \quad (2.85)$$

Pues bien, al hacer

$$A(r'') \simeq 1 + \frac{2m}{r''}, \quad (2.86)$$

se tiene que

$$1 - \frac{B(r'')}{B(r_0'')} \left(\frac{r_0''}{r''} \right)^2 \simeq 1 - \left[1 + 2m \left(\frac{1}{r_0''} - \frac{1}{r''} \right) \right] \left(\frac{r_0''}{r''} \right)^2 \simeq$$

$$\left(1 - \frac{r_0''^2}{r''^2} \right) \left[1 - \frac{2mr_0''}{r''(r'' + r_0'')} \right]$$

y, así, la integral en (2.84) correspondiente a $t(r_1'', r_0'')$ queda en la forma

$$t(r'', r_0'') \simeq \int_{r_0''}^{r''} \left(1 - \frac{r_0''^2}{r''^2} \right)^{-1/2} \left[1 + \frac{m}{r''} + \frac{2mr_0''}{r''(r'' + r_0'')} \right] dr'',$$

cuyo resultado es

$$t(r'', r_0'') \simeq \sqrt{r''^2 - r_0''^2} + m \ln \left(\frac{r'' + \sqrt{r''^2 - r_0''^2}}{r_0''} \right) +$$

$$m \left(\frac{r'' - r_0''}{r'' + r_0''} \right)^{\frac{1}{2}}$$

o, lo que es lo mismo,

$$t(r'', d'') \simeq \sqrt{r''^2 - d''^2} + m \ln \left(\frac{r'' + \sqrt{r''^2 - d''^2}}{d''} \right) +$$

$$m \left(\frac{r'' - d''}{r'' + d''} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Y análogamente se tiene el resultado para $t(r_2'', d'')$, de manera que, teniendo en cuenta (2.85), el resultado final es

$$t(r_1'', r_2'') = \sqrt{r_1''^2 - d''^2} + m \ln \left(\frac{r_1'' + \sqrt{r_1''^2 - d''^2}}{d''} \right) + m \left(\frac{r_1'' - d''}{r_1'' + d''} \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\sqrt{r_2''^2 - d''^2} + m \ln \left(\frac{r_2'' + \sqrt{r_2''^2 - d''^2}}{d''} \right) + m \left(\frac{r_2'' - d''}{r_2'' + d''} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.87)$$

donde ahora la solución clásica viene dada por los términos primero y cuarto y el efecto “time-delay” de Shapiro viene dado por los términos segundo, tercero, quinto y sexto de esta expresión.

2.3.2. La técnica de la función de universo

i) En coordenadas cartesianas

Esta técnica es mucho más sencilla que las dos anteriores porque, como se verá a continuación, la solución del problema se reduce a meras operaciones algebraicas.

Así, si se quieren utilizar las coordenadas cartesianas, la ecuación del tiempo se obtiene por iteración a partir (2.45) cuando se impone que $\Omega(P_1, P_2) = 0$ ya que, debido a la naturaleza del problema, se está suponiendo que P_1 y P_2 están unidos por una geodésica nula. Entonces, en el primer orden de aproximación, como $\Omega(P_1, P_2) = \frac{1}{2} (\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2)$, se tiene que

$$(\Delta t)^2 = \Delta x^\alpha \Delta x^\alpha = |\Delta x^\alpha|^2$$

y, por lo tanto, llevando este resultado a los términos de segundo orden, se tiene que

$$0 = \frac{1}{2} (\Delta x^\alpha \Delta x^\alpha - (\Delta t)^2) + m |\Delta x^\alpha| \left(\log \left(\frac{tg \frac{\theta_1}{2}}{tg \frac{\theta_2}{2}} \right) + \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right) + \frac{m |\Delta x^\alpha|^2}{|\Delta x^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta_1}{2}}{tg \frac{\theta_2}{2}} \right),$$

de manera que, despejando, resulta que

$$(\Delta t)^2 = |\Delta x^\alpha|^2 \left[1 + \frac{2m}{|\Delta x^\alpha|} \left\{ 2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_1}{2}}{tg \frac{\theta_2}{2}} \right) + \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right\} \right]$$

y, por tanto, que

$$\Delta t = |\Delta x^\alpha| \left[1 + \frac{m}{|\Delta x^\alpha|} \left\{ 2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_1}{2}}{tg \frac{\theta_2}{2}} \right) + \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \right\} \right], \quad (2.88)$$

de manera que ahora el efecto de Shapiro viene dado simplemente por el término de segundo orden de esta expresión. Y, naturalmente, si se hubiera partido de la ecuación en (2.48), entonces el resultado aparecería escrito de la siguiente manera:

$$\Delta t = |\Delta x^\alpha| \left[1 + \frac{m}{|\Delta x^\alpha|} \left\{ 2 \log \left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 - d^2}} \right) + \frac{\sqrt{r_1^2 - d^2}}{r_1} - \frac{\sqrt{r_2^2 - d^2}}{r_2} \right\} \right]. \quad (2.89)$$

ii) En coordenadas isotrópicas

Aquí, a partir de (2.51) y de manera análoga al caso anterior, se tiene en primer orden que

$$(\Delta t)^2 = \Delta x'^\alpha \Delta x'^\alpha = |\Delta x'^\alpha|^2$$

y, por lo tanto, en segundo orden tenemos que

$$(\Delta t)^2 = |\Delta x'^\alpha|^2 \left[1 + \frac{4m}{|\Delta x'^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta'_1}{2}}{tg \frac{\theta'_2}{2}} \right) \right],$$

con lo que el resultado final es

$$\Delta t = |\Delta x'^\alpha| \left[1 + \frac{2m}{|\Delta x'^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta'_1}{2}}{tg \frac{\theta'_2}{2}} \right) \right]. \quad (2.90)$$

Y en caso de que se partiera de la ecuación (2.54) el resultado habría sido:

$$\Delta t = |\Delta x'^\alpha| \left[1 + \frac{2m}{|\Delta x'^\alpha|} \log \left(\frac{r'_2 + \sqrt{r'^2_2 - d'^2}}{r'_1 + \sqrt{r'^2_1 - d'^2}} \right) \right] \quad (2.91)$$

que, obviamente, coincide, como tiene que ser, con (2.79).

iii) En coordenadas de curvatura (estandar)

Ahora, a partir de (2.56) se tiene, como antes, que en primer orden

$$(\Delta t)^2 = \Delta x''^\alpha \Delta x''^\alpha = |\Delta x''^\alpha|^2,$$

con lo que en segundo orden se tiene

$$(\Delta t)^2 = |\Delta x''^\alpha|^2 \left[1 + \frac{2m}{|\Delta x''^\alpha|} + \frac{4m}{|\Delta x''^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta'_1}{2}}{tg \frac{\theta'_2}{2}} \right) \right].$$

Así que el resultado final es

$$\Delta t = |\Delta x''^\alpha| \left[1 + \frac{m}{|\Delta x''^\alpha|} + \frac{2m}{|\Delta x''^\alpha|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta'_1}{2}}{tg \frac{\theta'_2}{2}} \right) \right] \quad (2.92)$$

o, bien, si utilizamos la ecuación (2.57),

$$\Delta t = |\Delta x''^\alpha| \left[1 + \frac{m}{|\Delta x''^\alpha|} + \frac{2m}{|\Delta x''^\alpha|} \log \left(\frac{r''_2 + \sqrt{r''_2{}^2 - d''^2}}{r''_1 + \sqrt{r''_1{}^2 - d''^2}} \right) \right], \quad (2.93)$$

que coincide con (2.87).

Naturalmente, todavía se podrían haber ahorrado unos cuantos cálculos porque se pueden obtener los resultados en (2.90) y (2.91) simplemente aplicando la transformación (v. (2.21))

$$x^\alpha = \left(1 + \frac{m}{r'} \right) x'^\alpha, \quad r = r' + m \quad (2.94)$$

en (2.88) y (2.89), y análogamente, la transformación

$$x'^\alpha = \left(1 + \frac{m}{r''} \right) x''^\alpha, \quad r' = r'' + m \quad (2.95)$$

en (2.90) y (2.91) para obtener (2.92) y (2.93). O, simplemente,

$$r = r'' + 2m \quad (2.96)$$

para pasar de (2.88) y (2.89) a (2.92) y (2.93).

Así, por ejemplo, para pasar de (2.91) a (2.87) lo único que hay que hacer es descomponer $|\Delta x'^\alpha|$ en $\sqrt{(r_2'^\alpha)^2 - (d')^2} + \sqrt{(r_1'^\alpha)^2 - (d')^2}$ y, a continuación, aplicar la transformación (2.95) a cada uno de estos sumandos. Así, para el primer sumando se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{r'^2 - r_0'^2} &= \sqrt{(r'' + m)^2 - (r_0'' + m)^2} = \\ &= \sqrt{r''^2 + m^2 + 2mr'' - r_0''^2 - m^2 - 2mr_0''} = \\ &= \sqrt{r''^2 - r_0''^2 + 2m(r'' - r_0'')} = \\ &= \sqrt{(r''^2 - r_0''^2) \left(1 + \frac{2m(r'' - r_0'')}{(r''^2 - r_0''^2)} \right)} = \sqrt{(r''^2 - r_0''^2) \left(1 + \frac{2m}{(r'' + r_0'')} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(r''^2 - r_0''^2)} \sqrt{\left(1 + \frac{2m}{(r'' + r_0'')}\right)} = \\
& \sqrt{(r''^2 - r_0''^2)} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2m}{(r'' + r_0'')}\right) = \\
& \sqrt{(r''^2 - r_0''^2)} + m \frac{\sqrt{(r''^2 - r_0''^2)}}{(r'' + r_0'')} = \\
& \sqrt{(r''^2 - r_0''^2)} + m \frac{\sqrt{(r'' - r_0'')}}{\sqrt{r'' + r_0''}}, \tag{2.97}
\end{aligned}$$

donde $r_0'' = d''$, y así se obtienen el primer y tercer términos de la ecuación del tiempo de Weinberg (v. (2.87)).

Queda, pues, claro que, al menos para encontrar el efecto “time-delay” de Shapiro, la técnica de la función de universo es extraordinariamente potente y fácil de manejar. Por otro lado, queremos resaltar que la fórmula (2.88) es la más adecuada para estudiar la influencia de este efecto en el problema de la Geolocalización por TDOA porque con ella es como se pone de manifiesto en un problema tan práctico como éste que este efecto, no sólo dependerá de los pseudorangos entre el radiotransmisor y los satélites involucrados en su localización sino, también, de los ángulos euclídeos asociados a las direcciones determinadas por la posición newtoniana del radiotransmisor, en el momento de emisión de la señal, calculado de acuerdo con el modelo newtoniano, y la posición de los satélites en los instantes de recepción.

Finalmente, quisiéramos también observar que la solución dada en (2.88) para Δt está escrita en términos del tiempo coordinado de cualquiera de las métricas dadas anteriormente (como, por lo demás, también ocurre con las restantes soluciones) y, por lo tanto, para dar la localización de los radiotransmisores en términos del tiempo GPS, entonces hay que utilizar la transformación (2.12).

Capítulo 3

Ecuaciones de Geolocalización por TDOA para tres satélites

3.1. Ecuaciones en la aproximación newtoniana (Relatividad Especial)

En este capítulo se obtienen las ecuaciones que permiten la localización por TDOA de un radiotransmisor situado sobre la superficie de la Tierra mediante tres satélites ecuatoriales, en particular geoestacionarios. Estas ecuaciones resultan de una modificación, y posterior generalización, del primer método de Ho y Chan que, como se ha dicho en la Introducción, sólo se puede utilizar con satélites geoestacionarios [3]. El método que resulta no es muy eficiente porque, incluso una vez que se arregla la redundancia en la que incurren estos autores con él, se obtienen cuatro soluciones que, en el mejor de los casos, se puede reducir a dos para asignar la localización (excepto cuando el radiotransmisor resulta estar sobre el Ecuador).

Como ya se sugirió en la Introducción, el interés de usar satélites geoestacionarios para localizar radiotransmisores es fundamentalmente de naturaleza económica, ya que se pueden utilizar los satélites existentes sin coste adicional significativo y, por lo tanto, no es necesario poner otros en órbita para el objetivo en cuestión. Además, los satélites geoestacionarios están casi inmóviles con respecto a la Tierra [19] y esto permite mediciones TDOA muy precisas que pueden reducir el error de localización. Por último, como estos satélites están realmente lejos de la Tierra (aprox. a 47.000 km) se pueden cubrir áreas de localización muy amplias y, aún, el tiempo de respuesta, una vez que se han elaborado los datos, sigue siendo corto.

A continuación, deducimos la ecuación general TDOA por medio de la función de universo, primero, en el caso clásico y, después, en el postnewtoniano. Esta ecuación se obtiene considerando dos satélites S_1 y S_2 , junto con el emisor, T , a partir de las ecuaciones generales que relacionan en el sistema ECI las coordenadas espacio-temporales de este radiotransmisor, (x^α, t) , en el momento de emisión de la señal, y de las coordenadas espacio-temporales que tienen estos satélites, (x^{α_1}, t_1) y (x^{α_2}, t_2) , al recibir la señal. Para el caso clásico, y de acuerdo con (2.29), en términos de la función de universo estas ecuaciones se escriben de la siguiente manera:

$$\Omega(x^i, x^{j_1}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\Omega(x^i, x^{j_2}) = 0, \quad (3.2)$$

donde $x^0 = t, x^{0_1} = t_1, x^{0_2} = t_2$ y

$$\Omega(x^i, x^{j_1}) = \frac{1}{2} [(x^\alpha - x^{\alpha_1})^2 - (t - t_1)^2], \quad (3.3)$$

$$\Omega(x^i, x^{j_2}) = \frac{1}{2} [(x^\alpha - x^{\alpha_2})^2 - (t - t_2)^2]. \quad (3.4)$$

Ahora, para adecuar esta notación a la notación clásica, identificamos x^{α_1} con $\vec{x}_1(x_1, y_1, z_1)$, x^{α_2} con $\vec{x}_2(x_2, y_2, z_2)$ y x^α con $\vec{x}(x, y, z)$. Así las funciones anteriores toman la forma

$$\Omega[(\vec{x}, t), (\vec{x}_1, t_1)] = \frac{1}{2} [(\vec{x} - \vec{x}_1)^2 - (t - t_1)^2], \quad (3.5)$$

$$\Omega[(\vec{x}, t), (\vec{x}_2, t_2)] = \frac{1}{2} [(\vec{x} - \vec{x}_2)^2 - (t - t_2)^2], \quad (3.6)$$

de manera que, como consecuencia de igualar estas funciones a cero, se tiene que ($c = 1$)

$$t_1 - t = |\vec{x} - \vec{x}_1|, \quad (3.7)$$

$$t_2 - t = |\vec{x} - \vec{x}_2|, \quad (3.8)$$

con lo que, restando estas ecuaciones resulta que la correspondiente ecuación TDOA es

$$t_1 - t_2 = |\vec{x} - \vec{x}_1| - |\vec{x} - \vec{x}_2| \quad (3.9)$$

o, lo que es lo mismo,

$$t_1 - t_2 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}, \quad (3.10)$$

que podemos escribir más brevemente de la siguiente manera:

$$r_{1,2} = r_1 - r_2, \quad (3.11)$$

donde $r_{1,2} = t_1 - t_2$ es el dato TDOA y

$$r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2, \quad i = 1, 2. \quad (3.12)$$

Como se ve, la ecuación (3.11) contiene las tres incógnitas espaciales (x, y, z) del radiotransmisor, pero no su coordenada temporal.

3.1.1. Satélites geoestacionarios

Consideramos ahora tres satélites geoestacionarios con coordenadas espacio-temporales conocidas en el sistema ECI en los momentos de la recepción de la señal, (\vec{x}_s, t_s) $s = (1, 2, 3)$, y supongamos que se conocen también $r_{1,2}$ y $r_{3,2}$ en este sistema. El método que proponemos para localizar un radiotransmisor con estos satélites es el siguiente: primero, y de acuerdo con (3.11), construimos las dos ecuaciones TDOA siguientes, que son no lineales, como ya se indicó con anterioridad,

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= r_1 - r_2, \\ r_{3,2} &= r_3 - r_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

y, a continuación, transformamos este sistema en otro lineal, de la forma siguiente:

En las ecuaciones (3.13) despejamos r_1 y r_3

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{1,2} + r_2, \\ r_3 &= r_{3,2} + r_2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

y, después, elevamos al cuadrado estas ecuaciones

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2, \\ r_3^2 &= r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ahora, como los tres satélites son geoestacionarios, podemos hacer $z_i = 0$; así que, en lugar de (3.12), se tiene que

$$r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z^2, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.16)$$

de manera que disponemos de dos ecuaciones más sencillas para las tres incógnitas (x, y, z) . Ahora añadimos la condición de que el radiotransmisor esté sobre la superficie de la Tierra, esto es, que

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_E^2 \quad (3.17)$$

donde r_E es el radio de la Tierra (aprox. 6378 km.) y llamamos $R^2 \equiv K_i$ al valor $x_i^2 + y_i^2$ ($i = 1, 2, 3$)

Entonces, el hecho de que los satélites sean geoestacionarios significa que $K_1 = K_2 = K_3 = R^2$, donde R es el radio geoestacionario; así que, desarrollando las expresiones en (3.16), se tiene que

$$\begin{aligned} r_i^2 &= x^2 - 2xx_i - 2yy_i + y^2 + z^2 + x_i^2 + y_i^2 = \\ &K_i - 2xx_i - 2yy_i + r_E^2 \quad i = 1, 3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Finalmente, introduciendo (3.18) en (3.15) se tiene que

$$\begin{aligned} 2xx_1 + 2yy_1 &= R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2, \\ 2xx_3 + 2yy_3 &= R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 \\ R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

que, como se ve, es un sistema lineal que contiene ya sólo las incógnitas x e y , aunque aparece también el pseudorango r_2 . Por lo tanto, mediante la inversión de la matriz de los coeficientes, que está formada por las coordenadas de los satélites 1 y 3 se tiene, que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \begin{pmatrix} y_3 & -y_1 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_1 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 \\ K_3 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

o, bien, que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \begin{pmatrix} y_3 & -y_1 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 \\ \bar{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \left[(y_3 - y_1) (\overline{K} - r_2^2) - y_3 r_{1,2}^2 + y_1 r_{3,2}^2 - 2r_2 (r_{1,2}y_3 - r_{3,2}y_1) \right], \\ y &= \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \left[(-x_3 + x_1) (\overline{K} - r_2^2) + x_3 r_{1,2}^2 - x_1 r_{3,2}^2 - 2r_2 (-r_{1,2}x_3 + r_{3,2}x_1) \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde $\overline{K} = K_i + r_E^2$.

Ahora, como de acuerdo con (3.23), para conocer x e y es preciso determinar r_2 , entonces escribimos la ecuación (3.17) en la forma $z^2 = r_E^2 - x^2 - y^2$ y, después, sustituimos este valor de z^2 en $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2$, pero sólo para $i = 2$. Así, se tiene que

$$r_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (r_E^2 - x^2 - y^2) \quad (3.24)$$

o, bien, que

$$r_2^2 = \overline{K} - 2xx_2 - 2yy_2, \quad (3.25)$$

de manera que llevando ahora (3.23) a (3.25) resulta que

$$\begin{aligned} r_2^2 &= \overline{K} - 2 \frac{x_2}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \times \\ &\quad \left[y_3 (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) - y_1 (\overline{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) \right] - \\ &\quad 2 \frac{y_2}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \times \\ &\quad \left[-x_3 (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + x_1 (\overline{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) \right] \end{aligned}$$

o, bien, simplificando:

$$\begin{aligned} r_2^2 &= \overline{K} - \frac{1}{(x_1y_3 - x_3y_1)} (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) [x_2y_3 - x_3y_2] - \\ &\quad \frac{1}{(x_1y_3 - x_3y_1)} (\overline{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) [x_1y_2 - x_2y_1], \end{aligned} \quad (3.26)$$

lo que equivale a

$$r_2^2 = \overline{K} - \frac{|\vec{R}_2 \times \vec{R}_3|}{|\vec{R}_1 \times \vec{R}_3|} (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) - \frac{|\vec{R}_1 \times \vec{R}_2|}{|\vec{R}_1 \times \vec{R}_3|} (\overline{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2), \quad (3.27)$$

donde \vec{R}_1 , \vec{R}_2 y \vec{R}_3 son los vectores de posición de los tres satélites respecto del origen del sistema ECI (esto quiere decir, en este caso, que $|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2| = |\vec{R}_3| = R$).

Pues bien, para encontrar numéricamente r_2 como solución de esta ecuación evitamos las posibles singularidades, primero, escribiendo (3.27) de la siguiente manera:

$$r_2^2 = \overline{K} - \frac{\text{sen}(\alpha_{23})}{\text{sen}(\alpha_{13})} (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) - \frac{\text{sen}(\alpha_{12})}{\text{sen}(\alpha_{13})} (\overline{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2), \quad (3.28)$$

donde α_{12} , α_{13} y α_{23} son los ángulos que forman los vectores \vec{R}_1 y \vec{R}_2 , \vec{R}_1 y \vec{R}_3 y \vec{R}_2 y \vec{R}_3 , respectivamente, y después, teniendo en cuenta que $\text{sen}(\alpha_{13}) \neq 0$, escribiendo (3.28) de la siguiente manera:

$$r_2^2 (\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12})) + r_2 (-2\text{sen}(\alpha_{23})r_{1,2} - 2\text{sen}(\alpha_{12})r_{3,2}) - \text{sen}(\alpha_{13})\overline{K} + \text{sen}(\alpha_{23})(\overline{K} - r_{1,2}^2) + \text{sen}(\alpha_{12})(\overline{K} - r_{3,2}^2) = 0, \quad (3.29)$$

que es una ecuación de 2º grado en r_2 libre ya de singularidades numéricas. Esta es la ecuación que se resuelve en los programas del Capítulo 6. Es una ecuación realmente complicada como se puede ver a continuación, sin más que echar un vistazo a su discriminante. En efecto, las soluciones vienen dadas por

$$r_2 = \frac{2(\text{sen}(\alpha_{23})r_{1,2} + \text{sen}(\alpha_{12})r_{3,2})}{2(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))} \pm \sqrt{\frac{4(\text{sen}(\alpha_{23})r_{1,2} + \text{sen}(\alpha_{12})r_{3,2})^2}{4(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))^2} - \dots}$$

$$\frac{4(\operatorname{sen}(\alpha_{13}) - \operatorname{sen}(\alpha_{23}) - \operatorname{sen}(\alpha_{12}))}{4(\operatorname{sen}(\alpha_{13}) - \operatorname{sen}(\alpha_{23}) - \operatorname{sen}(\alpha_{12}))^2} \times$$

$$\left[-\operatorname{sen}(\alpha_{13}) \overline{K} + \operatorname{sen}(\alpha_{23}) (\overline{K} - r_{1,2}^2) + \operatorname{sen}(\alpha_{12}) (\overline{K} - r_{3,2}^2) \right] \}^{\frac{1}{2}} \quad (3.30)$$

o, lo que es lo mismo, por

$$r_2 = \frac{(\operatorname{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2} + \operatorname{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2})}{(\operatorname{sen}(\alpha_{13}) - \operatorname{sen}(\alpha_{23}) - \operatorname{sen}(\alpha_{12}))} \pm$$

$$\left\{ \frac{-\operatorname{sen}(\alpha_{23}) \operatorname{sen}(\alpha_{12}) r_{1,3}^2 + \operatorname{sen}(\alpha_{13}) (\operatorname{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2}^2 + \operatorname{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2}^2)}{(\operatorname{sen}(\alpha_{13}) - \operatorname{sen}(\alpha_{23}) - \operatorname{sen}(\alpha_{12}))^2} + \overline{K} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.31)$$

donde la garantía de que el discriminante sea positivo sólo la podemos sustentar en la naturaleza real del problema.

Para entender el significado del método conviene resaltar que los dos valores de r_2 mostrados anteriormente determinan las longitudes de las generatrices de dos conos cuyos vértices están en la posición que ocupa el satélite S_2 en el momento de recepción de la señal. Cada cono corresponde a una solución de la ecuación, de manera que aquí se produce la primera incertidumbre para la localización del radiotransmisor. De hecho, hasta ahora lo que se puede garantizar es que el radiotransmisor está en una de las dos curvas intersección de los conos con la superficie de la Tierra (v. *Fig. 3.1*) y, por lo tanto, es importante poder desechar uno de estos dos conos. Pero esto sólo se puede hacer si la solución más grande para r_2 , en caso de que exista, es mayor o igual que $\sqrt{R^2 - r_E^2}$ (v. *Fig. 3.1*).

Pues bien, analizada esta posibilidad, hemos llegado a la conclusión de que esta circunstancia no ocurre siempre, sino que depende de la posición relativa de los

satélites S_1 y S_3 con respecto a S_2 .

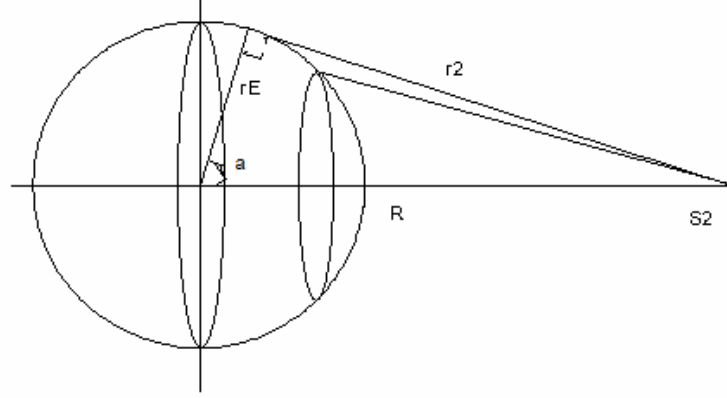


Fig.3.1

Así que, si esa circunstancia ocurriera entonces, llevando la solución más pequeña a (3.23), resultaría que

$$\begin{aligned}
 x = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} & \left[\left((y_3 - y_1) \left(\overline{K} - \left(\frac{(\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2} + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2})}{(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))} \right) \pm \right. \right. \\
 & \left. \left. \left\{ \frac{-\text{sen}(\alpha_{23}) \text{sen}(\alpha_{12}) r_{1,3}^2 + \text{sen}(\alpha_{13}) (\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2}^2 + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2}^2)}{(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))^2} + \overline{K} \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right. \\
 & \left. - y_3 r_{1,2}^2 + y_1 r_{3,2}^2 - 2 \left(\frac{(\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2} + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2})}{(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))} \pm \right. \right. \\
 & \left. \left. \left\{ \frac{-\text{sen}(\alpha_{23}) \text{sen}(\alpha_{12}) r_{1,3}^2 + \text{sen}(\alpha_{13}) (\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2}^2 + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2}^2)}{(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))^2} + \overline{K} \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \right. \\
 & \left. (r_{1,2}y_3 - r_{3,2}y_1) \right], \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} & \times \left[\left((-x_3 + x_1) \left(\overline{K} - \left(\frac{(\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2} + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2})}{(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))} \right) \pm \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left\{ \frac{-\text{sen}(\alpha_{23}) \text{sen}(\alpha_{12}) r_{1,3}^2 + \text{sen}(\alpha_{13}) (\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2}^2 + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2}^2)}{(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))^2} + \overline{K} \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right. \\
 & \left. \left. \left\{ \frac{-\text{sen}(\alpha_{23}) \text{sen}(\alpha_{12}) r_{1,3}^2 + \text{sen}(\alpha_{13}) (\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2}^2 + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2}^2)}{(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))^2} + \overline{K} \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x_3 r_{1,2}^2 - x_1 r_{3,2}^2 - 2 \left(\frac{(\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2} + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2})}{(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))} \pm \right. \\
& \left. \left\{ \frac{-\text{sen}(\alpha_{23}) \text{sen}(\alpha_{12}) r_{1,3}^2 + \text{sen}(\alpha_{13}) (\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2}^2 + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2}^2)}{(\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}))^2} + \bar{K} \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \\
& \quad (-r_{1,2}x_3 + r_{3,2}x_1) \Big], \tag{3.33}
\end{aligned}$$

de manera que, una vez que ya se conocen x e y , se puede obtener z utilizando nuevamente la ecuación de condición ($z^2 = r_E^2 - x^2 - y^2$), con lo que finalmente, se tienen dos soluciones para z , que son $z = \pm \sqrt{r_E^2 - x^2 - y^2}$ y, por lo tanto, dos localizaciones para el radiotransmisor, una en el hemisferio norte y, la otra, en el hemisferio sur.

Finalmente, el instante de emisión de la señal se obtiene llevando estos valores de x, y, z a cualquiera de las ecuaciones en (3.7) o (3.8) o, bien, a la ecuación $(t_3 - t) = |\vec{x} - \vec{x}_3|$, de donde también se deducen los tiempos que tarda la señal en alcanzar cada uno de los tres satélites. Así, si t_{cl} es el instante en el que el radiotransmisor emite la señal y x_{S_i} ($i = 1, 2, 3$) son las posiciones de los satélites S_i en los respectivos instantes de recepción, t_{S_i} , se tiene que t_{cl} viene dado indistintamente por cualquiera de las tres siguientes expresiones:

$$t_{cl} = t_{S_1} - r_1, \tag{3.34}$$

$$t_{cl} = t_{S_2} - r_2, \tag{3.35}$$

$$t_{cl} = t_{S_3} - r_3. \tag{3.36}$$

Queda claro, por tanto, que este método determina, en el mejor de los casos, dos soluciones, excepto si el radiotransmisor resultara estar sobre el Ecuador. Así que, para analizar con el mayor detalle posible estas soluciones consideramos, a continuación, unas distribuciones específicas de los tres satélites que no se alejan, de hecho, de muchas situaciones concretas.

En primer lugar, suponemos que los satélites S_1 y S_3 están situados en posiciones simétricas con respecto a S_2 en los momentos de recepción de la señal y, a continuación, añadimos la hipótesis de que los ángulos centrales formados por las posiciones de estos satélites son pequeños. Estas hipótesis reflejan una situación bastante común ya que, en efecto, es la que corresponde en determinados momentos a tres satélites geoestacionarios que están situados en la misma ventana espacial.

A) Posiciones simétricas de S_1 y S_3 con respecto a S_2 .

En el método que acabamos de mostrar, cualquiera de los tres satélites se puede considerar como “satélite S_2 ”. Por esta razón, parece conveniente para los cálculos que vienen a continuación tomar como “satélite S_2 ” el que esté en medio de los otros dos. Así, bajo este supuesto supongamos también que $\alpha_{23} = \alpha_{12}$. Entonces ocurre que $\text{sen}(\alpha_{23}) = \text{sen}(\alpha_{12})$, $\alpha_{13} = \alpha_{23} + \alpha_{12}$ y, como consecuencia,

$$\text{sen}(\alpha_{13}) = \text{sen}(2\alpha_{12}) = 2\text{sen}(\alpha_{12}) \cos(\alpha_{12}). \quad (3.37)$$

Así que, si sustituimos en (3.31) esta relación, resulta que

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{\text{sen}(\alpha_{12})(r_{1,2} + r_{3,2})}{2\text{sen}(\alpha_{12}) \cos(\alpha_{12}) - 2\text{sen}(\alpha_{12})} \pm \\ &\left(\frac{\text{sen}^2(\alpha_{12})(r_{1,2} + r_{3,2})^2}{4(\text{sen}(\alpha_{12}) \cos(\alpha_{12}) - \text{sen}(\alpha_{12}))^2} - \frac{(2\text{sen}(\alpha_{12}) \cos(\alpha_{12}) - 2\text{sen}(\alpha_{12}))}{4(\text{sen}(\alpha_{12}) \cos(\alpha_{12}) - \text{sen}(\alpha_{12}))^2} \times \right. \\ &\left. [-2\text{sen}(\alpha_{12}) \cos(\alpha_{12}) \bar{K} + \text{sen}(\alpha_{12})(\bar{K} - r_{1,2}^2) + \text{sen}(\alpha_{12})(\bar{K} - r_{3,2}^2)] \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

o, bien, simplificando,

$$r_2 = \frac{(r_{1,2} + r_{3,2})}{2(\cos(\alpha_{12}) - 1)} \pm \sqrt{\frac{(r_{1,2} + r_{3,2})^2}{4(\cos(\alpha_{12}) - 1)^2} + \bar{K} + \frac{(r_{1,2}^2 + r_{3,2}^2)}{2(\cos(\alpha_{12}) - 1)}} \quad (3.39)$$

o, lo que es lo mismo,

$$r_2 = \frac{(r_{1,2} + r_{3,2})}{2(\cos(\alpha_{12}) - 1)} \pm \sqrt{\frac{(r_{1,2} + r_{3,2})^2 + (r_{1,2}^2 + r_{3,2}^2) 2(\cos(\alpha_{12}) - 1)}{4(\cos(\alpha_{12}) - 1)^2} + \bar{K}}, \quad (3.40)$$

con lo que obtenemos una expresión más sencilla que la que teníamos en (3.33).

La naturaleza de estas soluciones se puede analizar ahora mucho mejor si suponemos, además, que $r_{1,2} = r_{3,2}$. Esto es así porque entonces la expresión para r_2 toma la forma siguiente:

$$r_2 = \frac{r_{1,2}}{(\cos(\alpha_{12}) - 1)} \pm \sqrt{\frac{(2r_{1,2})^2 + 4r_{1,2}^2(\cos(\alpha_{12}) - 1)}{4(\cos(\alpha_{12}) - 1)^2} + \bar{K}} =$$

$$\frac{r_{1,2}}{(\cos(\alpha_{12}) - 1)} \pm \sqrt{\frac{r_{1,2}^2 \cos(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12}) - 1)^2} + \overline{K}} \quad (3.41)$$

que, como se ve, sólo depende de las posiciones de S_1 y S_2 en los momentos de recepción de la señal. Y aquí se puede ver muy bien que el discriminante de la solución es siempre positivo con tal de que S_1 y S_3 no estén en cuadratura con S_2 en esos momentos, algo que nunca puede ocurrir en la realidad porque el ángulo máximo, α_{12} , que pueden formar R_1 y R_2 es, aproximadamente, de 83° (v. *Fig. 3.2*)

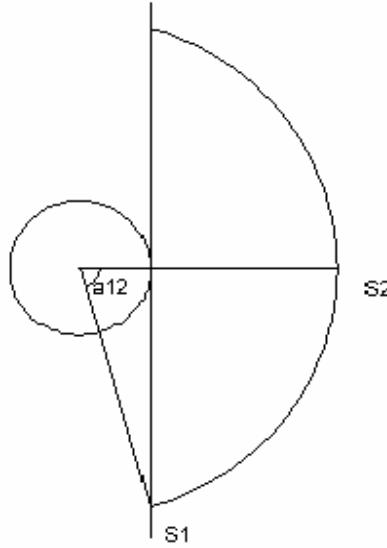


Fig.3.2

Ahora, para probar la solución correspondiente a estos valores de r_2 se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que S_2 está situado en $(x_2, y_2) = (x_2, 0)$ cuando recibe la señal. Entonces, los satélites S_1 y S_3 están en diferentes cuadrantes de manera que las coordenadas espaciales de S_1 y S_3 al recibir la señal son (x_1, y_1) y $(x_1, -y_1)$, respectivamente.

Entonces, a partir de (3.23) tenemos que

$$x = \frac{1}{2(-x_1 y_1 - x_1 y_1)} \times \left[-y_1 (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) - y_1 (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) \right] \quad (3.42)$$

o, bien, que

$$x = \frac{\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2}{2x_1}, \quad (3.43)$$

de manera que, al sustituir el valor de r_2 dado en (3.41) en esta expresión, después de algunos cálculos se tiene que

$$x = \frac{-r_{1,2}^2 \left[\frac{(\cos(\alpha_{12})-1)^2 + 2(\cos(\alpha_{12})-1) + 1 + \cos(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)^2} \right] \mp \frac{2r_{1,2} \left[\frac{\cos(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)} \right] \sqrt{\frac{r_{1,2}^2 \cos(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)^2} + \overline{K}}}{2x_1}}{2x_1} \quad (3.44)$$

y, lo que es más importante, que y vale 0, ya que

$$y = \frac{1}{2(-x_1y_1 - x_1y_1)} \times$$

$$[-x_1(\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + x_1(\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2)],$$

lo que significa, de acuerdo con la representación geométrica del problema, que el radiotransmisor habría tenido que estar al emitir la señal en el meridiano de S_2 al emitir la señal. Finalmente, para z se tienen los valores

$$z = \pm \left[r_E^2 - \left(\frac{-r_{1,2}^2 \left[\frac{(\cos(\alpha_{12})-1)^2 + 2(\cos(\alpha_{12})-1) + 1 + \cos(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)^2} \right] \mp \frac{2r_{1,2} \left[\frac{\cos(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)} \right] \sqrt{\frac{r_{1,2}^2 \cos(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)^2} + \overline{K}}}{2x_1}}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.45)$$

o, bien,

$$z = \pm \left[r_E^2 - \frac{\frac{r_{1,2}^4}{(\cos(\alpha_{12})-1)^4} [\cos^2(\alpha_{12})(\cos(\alpha_{12})+1)^2 + 4\cos^3(\alpha_{12})]}{4x_1^2} + \right]$$

$$\frac{4r_{1,2}^2 \bar{K} \frac{\cos^2(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)^2}}{4x_1^2} \mp \left[\frac{\frac{4r_{1,2}^3}{(\cos(\alpha_{12})-1)^3} \left[\cos^2(\alpha_{12}) (\cos(\alpha_{12}) + 1) \sqrt{\frac{r_{1,2}^2 \cos(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)^2} + \bar{K}} \right]}{4x_1^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.46)$$

es decir,

$$z = \pm \left[r_E^2 - \frac{\frac{r_{1,2}^4 \cos^2(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)^4} [1 + \cos^2(\alpha_{12}) + 6 \cos(\alpha_{12})] + 4r_{1,2}^2 \bar{K} \frac{\cos^2(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)^2}}{4x_1^2} \mp \left[\frac{\frac{4r_{1,2}^3 \cos^2(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)^3} (\cos(\alpha_{12}) + 1) \sqrt{\frac{r_{1,2}^2 \cos(\alpha_{12})}{(\cos(\alpha_{12})-1)^2} + \bar{K}}}{4x_1^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right], \quad (3.47)$$

de los cuales uno corresponde, como es evidente, al hemisferio Norte y, el otro, al hemisferio Sur.

B) Ángulos pequeños

Bajo la consideración de que los ángulos entre S_1 y S_2 , así como entre S_2 y S_3 , son pequeños podemos ahora aproximar (sólo a efectos de análisis) $\text{sen}(\alpha_{12})$ por α_{12} y $\text{sen}(\alpha_{23})$ por α_{23} , de manera que, al ser $\alpha_{13} = \alpha_{23} + \alpha_{12}$, se tiene que

$$\text{sen}(\alpha_{13}) = \text{sen}(\alpha_{23} + \alpha_{12}) = \text{sen}(\alpha_{23}) \cos(\alpha_{12}) + \cos(\alpha_{23}) \text{sen}(\alpha_{12}).$$

Por lo tanto, se puede escribir $\text{sen}(\alpha_{13})$ de la siguiente manera:

$$\text{sen}(\alpha_{13}) = \alpha_{23} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_{12}^2 \right) + \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_{23}^2 \right) \alpha_{12}$$

y, por consiguiente, tenemos que

$$\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12}) = -\frac{1}{2} \alpha_{23} \alpha_{12}^2 - \frac{1}{2} \alpha_{12} \alpha_{23}^2.$$

Entonces, la ecuación en (3.29) se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2}\alpha_{23}\alpha_{12}^2 - \frac{1}{2}\alpha_{12}\alpha_{23}^2 \right) r_2^2 - 2r_2 (\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2}) - \\ & \left(-\frac{1}{2}\alpha_{23}\alpha_{12}^2 - \frac{1}{2}\alpha_{12}\alpha_{23}^2 \right) \overline{K} - (\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

o, bien, en la forma

$$\begin{aligned} & (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2) r_2^2 + 4r_2 (\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2}) - \\ & (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2) \overline{K} + 2 (\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) = 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} r_2 = & \frac{-2 (\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)} \pm \left[\frac{16 (\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2}{4 (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} - \frac{4 (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)}{4 (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} \times \right. \\ & \left. [- (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2) \overline{K} + 2 (\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2)] \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

o, bien, que

$$\begin{aligned} r_2 = & \frac{-2 (\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)} \pm \\ & \sqrt{\frac{4 (\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2 (\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) \times (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2}} + \overline{K}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ahora, a partir de estos dos valores de r_2 y de (3.23), resulta que

$$x = \frac{1}{2 (x_1 y_3 - x_3 y_1)} \left[y_3 \left\{ \overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2} \times \left(\frac{-2 (\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)} \pm \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2(\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) \times (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} + \overline{K}} \Big) - \\
& \quad \left(\frac{-2(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)} \pm \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2(\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) \times (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} + \overline{K}} \right)^2 \Big\} - \\
& \quad y_1 (\overline{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2} \times \\
& \quad \left(\frac{-2(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)} \pm \right. \\
& \quad \left. \sqrt{\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2(\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) \times (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} + \overline{K}} \right) - \\
& \quad \left(\frac{-2(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)} \pm \right. \\
& \quad \left. \left. \pm \sqrt{\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2(\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) \times (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} + \overline{K}} \right)^2 \right) \Big]
\end{aligned}$$

o, bien, que

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \left[(-y_3 r_{1,2}^2 + y_1 r_{3,2}^2) + \left[\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)} \right. \right. \\
& \quad \left. \mp 2 \sqrt{\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2(\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) \times (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} + \overline{K}} \right] \times \\
& \quad (y_3 r_{1,2} - y_1 r_{3,2}) - \left(\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} + \right. \\
& \quad \left. \frac{(4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2(\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2)(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2))}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} \pm \right. \\
& \quad \left. \frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} \times (y_3 - y_1) \right)
\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2(\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) \times (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} + \bar{K}} \Bigg] . \quad (3.51)$$

Y, de manera análoga, se tiene que

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \left[(x_3 r_{1,2}^2 - x_1 r_{3,2}^2) + \left[\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)} \right. \right. \\ & \mp 2 \sqrt{\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2(\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) \times (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} + \bar{K}} \Bigg] \times \\ & (-x_3 r_{1,2} + x_1 r_{3,2}) - \left[\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} + \right. \\ & \left. \frac{(4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2(\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2)(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2))}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} \right] \pm \\ & \frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} \times (-x_3 + x_1) \Bigg] \\ & \sqrt{\frac{4(\alpha_{23}r_{1,2} + \alpha_{12}r_{3,2})^2 - 2(\alpha_{23}r_{1,2}^2 + \alpha_{12}r_{3,2}^2) \times (\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)}{(\alpha_{23}\alpha_{12}^2 + \alpha_{12}\alpha_{23}^2)^2} + \bar{K}} \Bigg] , \quad (3.52) \end{aligned}$$

con lo que se puede obtener obviamente z al sustituir los valores de x e y en

$$z = \pm \sqrt{r_E^2 - x^2 - y^2}$$

C) Posiciones simétricas de S_1 y S_3 con respecto a S_2 y ángulos pequeños

Finalmente, consideramos las hipótesis de los dos apartados anteriores conjuntamente, es decir, que $\alpha_{12} = \alpha_{32}$ y por tanto que $\text{sen}(2\alpha_{12}) = 2\text{sen}(\alpha_{12})\cos(\alpha_{12})$. Entonces tenemos que $\text{sen}(2\alpha_{12}) = 2\text{sen}(\alpha_{12})\cos(\alpha_{12}) = 2\alpha_{12}(1 - \frac{1}{2}\alpha_{12}^2)$ y la ecuación (3.29) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \left(2\alpha_{12} \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_{12}^2 \right) - 2\alpha_{12} \right) r_2^2 - 2r_2\alpha_{12}(r_{1,2} + r_{3,2}) + \\ & \alpha_{12}^2 \bar{K} - \alpha_{12}(r_{1,2}^2 + r_{3,2}^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

o, lo que es lo mismo, en la forma

$$\alpha_{12}^3 r_2^2 + 2r_2 \alpha_{12} (r_{1,2} + r_{3,2}) - \alpha_{12}^3 \bar{K} + \alpha_{12} (r_{1,2}^2 + r_{3,2}^2) = 0, \quad (3.54)$$

de manera que, al resolver esta ecuación, se tiene que

$$r_2 = \frac{-(r_{1,2} + r_{3,2}) \pm \sqrt{(r_{1,2} + r_{3,2})^2 + \alpha_{12}^4 \bar{K} - \alpha_{12}^2 (r_{1,2}^2 + r_{3,2}^2)}}{\alpha_{12}^2}, \quad (3.55)$$

que son los valores que llevamos a las ecuaciones en (3.23). El resultado para x e y ahora es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2(x_1 y_3 - x_3 y_1)} \times \\ &\left[(y_3 - y_1) \left(\bar{K} - \left(\frac{-(r_{1,2} + r_{3,2}) \pm \sqrt{(r_{1,2} + r_{3,2})^2 + \alpha_{12}^4 \bar{K} - \alpha_{12}^2 (r_{1,2}^2 + r_{3,2}^2)}}{\alpha_{12}^2} \right)^2 \right) \right. \\ &\left. - y_3 r_{1,2}^2 + y_1 r_{3,2}^2 - 2 \left(\frac{-(r_{1,2} + r_{3,2}) \pm \sqrt{(r_{1,2} + r_{3,2})^2 + \alpha_{12}^4 \bar{K} - \alpha_{12}^2 (r_{1,2}^2 + r_{3,2}^2)}}{\alpha_{12}^2} \right) \times \right. \\ &\left. (r_{1,2} y_3 - r_{3,2} y_1) \right], \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2(x_1 y_3 - x_3 y_1)} \times \\ &\left[(-x_3 + x_1) \left(\bar{K} - \left(\frac{-(r_{1,2} + r_{3,2}) \pm \sqrt{(r_{1,2} + r_{3,2})^2 + \alpha_{12}^4 \bar{K} - \alpha_{12}^2 (r_{1,2}^2 + r_{3,2}^2)}}{\alpha_{12}^2} \right)^2 \right) \right. \\ &\left. + x_3 r_{1,2}^2 - x_1 r_{3,2}^2 - 2 \left(\frac{-(r_{1,2} + r_{3,2}) \pm \sqrt{(r_{1,2} + r_{3,2})^2 + \alpha_{12}^4 \bar{K} - \alpha_{12}^2 (r_{1,2}^2 + r_{3,2}^2)}}{\alpha_{12}^2} \right) \times \right. \\ &\left. (-r_{1,2} x_3 + r_{3,2} x_1) \right], \end{aligned} \quad (3.57)$$

y, obviamente, para z tenemos que

$$z = \pm \sqrt{r_E^2 - x^2 - y^2}.$$

Pues bien, si se supone ahora que $r_{1,2} = r_{3,2}$, entonces para r_2 tenemos que

$$r_2 = \frac{-2r_{1,2} \pm \sqrt{4r_{1,2}^2 + \alpha_{12}^4 \bar{K} - 2\alpha_{12}^2 r_{1,2}^2}}{\alpha_{12}}$$

o, bien, que

$$r_2 = \frac{-2r_{1,2} \pm \sqrt{2r_{1,2}^2(2 - \alpha_{12}^2) + \alpha_{12}^4 \bar{K}}}{\alpha_{12}^2}, \quad (3.58)$$

que es la expresión más simple posible porque si se añade la condición $r_{1,2} = 0$ entonces la expresión de r_2 queda en la forma

$$r_2 = \pm \sqrt{\bar{K}}, \quad (3.59)$$

lo que significa que $x = 0$, $y = 0$, y $z = \pm r_E$, esto es, que el radiotransmisor estaba en el momento de emitir la señal, o bien en el polo Norte o, bien, en el polo Sur, que es un resultado matemáticamente muy importante porque proporciona la confianza suficiente sobre la bondad del método, aunque no tenga significado físico ya que, en este caso, no se habría recibido la señal del radiotransmisor, puesto que éste no puede estar en una latitud cuyo valor absoluto sea mayor que α , que es el ángulo que se muestra en la *Fig. 3.1*.

3.1.2. Satélites ecuatoriales

La generalización del método anterior al caso en que los tres satélites no sean geoestacionarios, pero todavía permanezcan en el plano del Ecuador, es verdaderamente sencilla. En este caso consideramos tres satélites con coordenadas espaciotemporales conocidas en los momentos de recepción de la señal, $(x_{S_i}, y_{S_i}, z_{S_i}, t_{S_i})$, de manera que $z_{S_i} = 0$ y suponemos también, como es lógico, que $r_{1,2}$ y $r_{3,2}$ son conocidas. Entonces planteamos un sistema de dos ecuaciones no lineales con tres incógnitas que es el mismo que el escrito en (3.13). Ahora bien, aquí suponemos que $R_i^2 = K_i = x_i^2 + y_i^2$ ($i = 1, 2, 3$) donde $K_1 \neq K_2 \neq K_3$, tanto para obtener las expresiones de las ecuaciones como las de sus soluciones. Por lo demás, todo el desarrollo de este apartado es similar al apartado anterior. Así pues, partimos de las ecuaciones

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= r_1 - r_2, \\ r_{3,2} &= r_3 - r_2, \end{aligned} \quad (3.60)$$

de manera que en estas ecuaciones despejamos r_1 y r_3 ,

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{1,2} + r_2, \\ r_3 &= r_{3,2} + r_2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

y elevamos al cuadrado como en la Sección anterior,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2 \\ r_3^2 &= r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Naturalmente,

$$r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.63)$$

ya que, igual que antes, los satélites S_i están en el plano del ecuador ($z_i = 0$).

Para encontrar ahora el sistema lineal correspondiente consideramos las ecuaciones en (3.62) y, nuevamente, la ecuación de condición de que el observador está sobre la Tierra:

$$r_E^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (3.64)$$

Entonces tenemos que

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2 \quad (i = 1, 3), \quad (3.65)$$

$$r_i^2 = x^2 - 2xx_i - 2yy_i + y^2 + z^2 + x_i^2 + y_i^2 = K_i - 2xx_i - 2yy_i + r_E^2, \quad (3.66)$$

$$r_1^2 = r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2,$$

$$r_3^2 = r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2,$$

de manera que, al sustituir r_1^2 y r_3^2 por su valor en (3.66), se tiene que

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2,$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + z^2 = r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2,$$

o, lo que es lo mismo, que

$$\begin{aligned} R_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + r_E^2 &= r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2, \\ R_3^2 - 2xx_3 - 2yy_3 + r_E^2 &= r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Así que el sistema lineal queda ahora así:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} R_1^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 \\ R_3^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 \end{pmatrix},$$

de manera que su solución viene dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \begin{pmatrix} y_3 & -y_1 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 \\ \overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 \end{pmatrix},$$

es decir, por

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \times \\ \quad [y_3 (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) - y_1 (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2)] \\ y = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \times \\ \quad [-x_3 (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + x_1 (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2)] \end{array} \right. \quad (3.68)$$

donde $\overline{K_i} = K_i + r_E^2 \quad (i = 1, 2, 3)$.

Ahora, si sustituimos $z^2 = r_E^2 - x^2 - y^2$ en $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2$ para $i = 2$ resulta que

$$r_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (r_E^2 - x^2 - y^2), \quad (3.69)$$

es decir, que

$$r_2^2 = x_2^2 - 2xx_2 + y_2^2 - 2yy_2 + r_E^2 \quad (3.70)$$

o, lo que es lo mismo, que

$$r_2^2 = \overline{K_2} - 2xx_2 - 2yy_2. \quad (3.71)$$

Por tanto, si sustituimos x, y por las expresiones dadas en (3.68) resulta que

$$\begin{aligned} r_2^2 &= \overline{K_2} - 2 \frac{x_2}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \times \\ &\quad [y_3 (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) - y_1 (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2)] - \\ &\quad 2 \frac{y_2}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \times \\ &\quad [-x_3 (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + x_1 (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2)] \end{aligned} \quad (3.72)$$

o, bien, que

$$r_2^2 = \overline{K_2} - \frac{|\vec{R_2} \times \vec{R_3}|}{|\vec{R_1} \times \vec{R_3}|} (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) - \frac{|\vec{R_1} \times \vec{R_2}|}{|\vec{R_1} \times \vec{R_3}|} (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2), \quad (3.73)$$

donde $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$ y $\vec{R_3}$ son los vectores de posición de los tres satélites respecto del centro del sistema ECI. Y de aquí se deduce que la ecuación que ha de satisfacer r_2 es:

$$r_2^2 \left(|\vec{R_1}| |\vec{R_3}| \sin(\alpha_{13}) - |\vec{R_2}| |\vec{R_3}| \sin(\alpha_{23}) - |\vec{R_1}| |\vec{R_2}| \sin(\alpha_{12}) \right) - 2r_2 \left(|\vec{R_2}| |\vec{R_3}| \sin(\alpha_{23}) r_{1,2} + |\vec{R_1}| |\vec{R_2}| \sin(\alpha_{12}) r_{3,2} \right) - |\vec{R_1}| |\vec{R_3}| \sin(\alpha_{13}) \overline{K_2} + |\vec{R_2}| |\vec{R_3}| \sin(\alpha_{23}) (\overline{K_1} - r_{1,2}^2) + |\vec{R_1}| |\vec{R_2}| \sin(\alpha_{12}) (\overline{K_3} - r_{3,2}^2) = 0, \quad (3.74)$$

que es una generalización de la ecuación obtenida en (3.29). El resto del procedimiento ya no lo detallamos porque es igual que el desarrollado anteriormente.

3.2. Ecuaciones en la aproximación postnewtoniana (Relatividad General)

3.2.1. Satélites ecuatoriales

En esta Sección formulamos el método que venimos desarrollando suponiendo que el espacio-tiempo alrededor de la Tierra ya no es plano, sino que se describe de acuerdo con la aproximación postnewtoniana de la Relatividad General. Teniendo en cuenta, además, los resultados obtenidos hasta ahora, describimos el problema directamente para tres satélites ecuatoriales no necesariamente geoestacionarios.

Por lo tanto, aquí se consideran tres satélites con coordenadas espacio-temporales conocidas en el sistema ECI, (x^{α_i}, t_{s_i}) ($i = 1, 2, 3$), en los instantes de recepción de

la señal del radiotransmisor y suponemos, igualmente, que $r_{1,2}$ y $r_{3,2}$ son conocidas. Si se supone que el radiotransmisor, T , tiene coordenadas (x^α, t) en el momento de emisión de la señal, entonces, de manera análoga (3.1) y (3.2), las ecuaciones básicas a considerar para obtener una ecuación TDOA ahora son de la forma:

$$\Omega(x^i, x^{j_l}) = 0, \quad (l = 1, 2) \quad (3.75)$$

donde $\Omega(x^i, x^{j_l})$ viene dada, de acuerdo con (2.45), y para el caso de que T no esté alineado con ningún satélite, por

$$\begin{aligned} \Omega(x^i, x^{j_l}) = & \frac{1}{2} ((x^\alpha - x^{\alpha_l})^2 - (t - t_l)^2) + \\ & m |x^\alpha - x^{\alpha_l}| \left(\log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_l}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_l}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_l} - \cos \theta_{S_l} \right) + \\ & \frac{m (x^\alpha - x^{\alpha_l})^2}{|x^\alpha - x^{\alpha_l}|} \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_l}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_l}}{2}} \right), \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde θ_{T_l} es el ángulo que forma x^α con $(x^{\alpha_l} - x^\alpha)$ y θ_{S_l} es el ángulo que forma x^{α_l} con $(x^{\alpha_l} - x^\alpha)$ (*Fig. 3.3*). Por supuesto, para el caso de que haya una alineación con uno de los dos satélites entonces, de acuerdo con (2.72), la correspondiente función de universo toma la forma:

$$\begin{aligned} \Omega(x^i, x^{j_l}) = & \frac{1}{2} ((x^\alpha - x^{\alpha_l})^2 - (t - t_l)^2) + \\ & m \left[|x^\alpha - x^{\alpha_l}| + \frac{(x^\alpha - x^{\alpha_l})^2}{|x^\alpha - x^{\alpha_l}|} \right] \log \frac{|x^{\alpha_l}|}{|x^\alpha|}. \end{aligned}$$

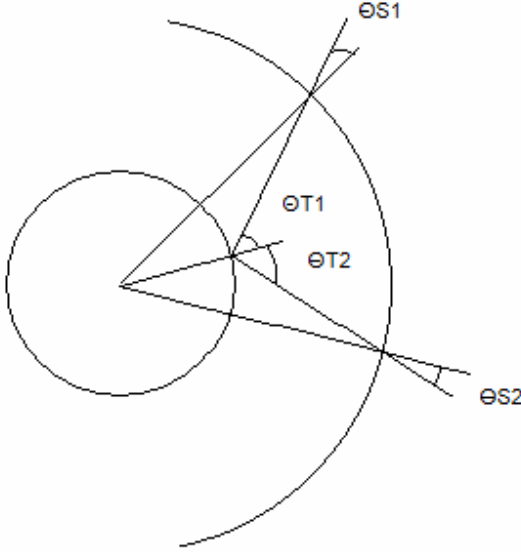


Fig.3.3

Para obtener la ecuación TDOA correspondiente a estos dos satélites procedemos de manera análoga a como hicimos en la sección anterior.

Consideramos, pues,

$$\Omega(x^i, x^{j_1}) = 0, \quad (3.77)$$

$$\Omega(x^i, x^{j_2}) = 0, \quad (3.78)$$

y de aquí deducimos, de acuerdo con (2.88), que

$$t_{S_1} = t + r_1 + m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_1}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_1}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_1} - \cos \theta_{S_1} \right] \quad (3.79)$$

$$t_{S_2} = t + r_2 + m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_2}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_2}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_2} - \cos \theta_{S_2} \right], \quad (3.80)$$

de donde se deduce que

$$t_{S_1} - t_{S_2} = r_1 - r_2 + m \left\{ 2 \log \left[\frac{\left(tg \frac{\theta_{T_1}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_{S_2}}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{T_2}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_{S_1}}{2} \right)} \right] + \right. \quad (3.81)$$

$$\left. (\cos \theta_{T_1} - \cos \theta_{T_2}) + (\cos \theta_{S_2} - \cos \theta_{S_1}) \right\}$$

o, lo que es lo mismo, que

$$r_{1,2} = r_1 - r_2 + p_{12} \quad (3.82)$$

donde, igual que antes, $r_{1,2} = t_{S_1} - t_{S_2}$ y

$$p_{12} = m \left\{ 2 \log \left[\frac{\left(tg \frac{\theta_{T_1}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_{S_2}}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{T_2}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_{S_1}}{2} \right)} \right] + (\cos \theta_{T_1} - \cos \theta_{T_2}) + (\cos \theta_{S_2} - \cos \theta_{S_1}) \right\} \quad (3.83)$$

Ahora, para escribir ecuaciones comparables a las ecuaciones en (3.60) escribimos la ecuación (3.82) en la forma ($r_1 \neq r_2$):

$$r_{1,2} = (r_1 - r_2) \left(1 + \frac{p_{12}}{r_1 - r_2} \right) \quad (3.84)$$

y planteamos, a continuación, un sistema de dos ecuaciones no lineales con tres incógnitas, que son las coordenadas espaciales del radiotransmisor, T , en el momento de la emisión de la señal, de manera que aparecen unos términos que corresponden a correcciones del tipo $\eta_{12} = -\frac{p_{12}}{r_1 - r_2}$, donde p_{12} , r_1 y r_2 corresponden a la solución clásica.

Por lo tanto, las nuevas ecuaciones son

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= r_1 - r_2 + p_{12}, \\ r_{3,2} &= r_3 - r_2 + p_{32}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

donde p_{12} viene dado por (3.83) y

$$p_{32} = m \left\{ 2 \log \left[\frac{\left(tg \frac{\theta_{T_3}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_{S_2}}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{T_2}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_{S_3}}{2} \right)} \right] + (\cos \theta_{T_3} - \cos \theta_{T_2}) + (\cos \theta_{S_2} - \cos \theta_{S_3}) \right\} \quad (3.86)$$

o, lo que es lo mismo ($r_2 \neq r_3$),

$$\begin{aligned} r_{1,2} \left(1 - \frac{p_{12}}{r_1 - r_2} \right) &= r_1 - r_2, \\ r_{3,2} \left(1 - \frac{p_{32}}{r_3 - r_2} \right) &= r_3 - r_2, \end{aligned} \quad (3.87)$$

y, así, queda

$$\begin{aligned} r_{1,2} (1 + \eta_{12}) &= r_1 - r_2, \\ r_{3,2} (1 + \eta_{32}) &= r_3 - r_2, \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde $\eta_{ij} = -\frac{p_{ij}}{r_i - r_j}$ ($r_i \neq r_j$).

A continuación seguimos un proceso análogo al de las secciones anteriores. Por lo tanto, en las ecuaciones (3.88) despejamos r_1 y r_3

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{1,2}(1 + \eta_{12}) + r_2, \\ r_3 &= r_{3,2}(1 + \eta_{32}) + r_2, \end{aligned} \quad (3.89)$$

de manera que, elevándolas al cuadrado, tenemos que

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) + 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) + r_2^2, \\ r_3^2 &= r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) + 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) + r_2^2, \end{aligned} \quad (3.90)$$

ya que η_{12}^2 y η_{32}^2 se pueden despreciar en el orden postnewtoniano.

Además,

$$r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.91)$$

porque los tres satélites son ecuatoriales.

Por lo tanto, para resolver el sistema correspondiente es necesario considerar las ecuaciones (3.88) junto con la ecuación condición de que el observador está sobre la superficie de la Tierra:

$$r_E^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (3.92)$$

Así, ahora tenemos que

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 &= r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) + 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) + r_2^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + z^2 &= r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) + 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) + r_2^2, \end{aligned} \quad (3.93)$$

o, bien, simplificando, que

$$\begin{aligned} R_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + r_E^2 &= r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) + 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) + r_2^2, \\ R_3^2 - 2xx_3 - 2yy_3 + r_E^2 &= r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) + 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) + r_2^2, \end{aligned} \quad (3.94)$$

lo que da lugar, en forma matricial, al siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} R_1^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) - 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) - r_2^2 \\ R_3^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) - 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) - r_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

Naturalmente, para resolver este sistema hay que calcular la matriz inversa de los coeficientes, de manera que las soluciones para x e y vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \begin{pmatrix} y_3 & -y_1 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overline{K_1} - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) - 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) - r_2^2 \\ \overline{K_3} - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) - 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) - r_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

donde $\overline{K_i} = K_i + r_E^2$ ($i = 1, 2, 3$) o, bien, por

$$x = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \times [y_3 (\overline{K_1} - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) - 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) - r_2^2) - y_1 (\overline{K_3} - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) - 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) - r_2^2)] , \quad (3.97)$$

$$y = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \times [-x_3 (\overline{K_1} - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) - 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) - r_2^2) + x_1 (\overline{K_3} - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) - 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) - r_2^2)] . \quad (3.98)$$

Ahora la expresión $z^2 = r_E^2 - x^2 - y^2$ se lleva a $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2$ para $i = 2$ y se tiene que

$$r_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (r_E^2 - x^2 - y^2) , \quad (3.99)$$

con lo que, haciendo las simplificaciones oportunas, tenemos que

$$r_2^2 = \overline{K_2} - 2xx_2 - 2yy_2, \quad (3.100)$$

de donde se deduce, llevando los valores de x e y obtenidos en (3.97) y (3.98) a (3.100), que

$$\begin{aligned} r_2^2 = \overline{K_2} - 2 \frac{x_2}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \times \\ [y_3 (\overline{K_1} - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) - 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) - r_2^2) - \\ y_1 (\overline{K_3} - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) - 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) - r_2^2)] - \\ 2 \frac{y_2}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \times \\ [-x_3 (\overline{K_1} - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) - 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) - r_2^2) + \end{aligned}$$

$$x_1 \left(\overline{K_3} - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) - 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) - r_2^2 \right) \quad (3.101)$$

o, bien, que

$$\begin{aligned} r_2^2 = & \overline{K_2} - \frac{1}{(x_1y_3 - x_3y_1)} \times \\ & \left(\overline{K_1} - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) - 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) - r_2^2 \right) [x_2y_3 - x_3y_2] - \\ & \frac{1}{(x_1y_3 - x_3y_1)} \left(\overline{K_3} - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) - 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) - r_2^2 \right) \times \\ & [x_1y_2 - x_2y_1]. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Nuevamente esta ecuación se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} r_2^2 = & \overline{K_2} - \frac{|\vec{R_2} \times \vec{R_3}|}{|\vec{R_1} \times \vec{R_3}|} \left(\overline{K_1} - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) - 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) - r_2^2 \right) - \\ & \frac{|\vec{R_1} \times \vec{R_2}|}{|\vec{R_1} \times \vec{R_3}|} \left(\overline{K_3} - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) - 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) - r_2^2 \right) \end{aligned} \quad (3.103)$$

(donde $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$ y $\vec{R_3}$ son los vectores de posición euclídeos de los tres satélites respecto del centro del sistema ECI en los momentos de recepción de la señal) o, bien, en la forma

$$\begin{aligned} r_2^2 = & \overline{K_2} - \frac{|\vec{R_2}| |\vec{R_3}| \text{sen}(\alpha_{23})}{|\vec{R_1}| |\vec{R_3}| \text{sen}(\alpha_{13})} \left(\overline{K_1} - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) - 2r_{1,2}r_2(1 + \eta_{12}) - r_2^2 \right) - \\ & \frac{|\vec{R_1}| |\vec{R_2}| \text{sen}(\alpha_{12})}{|\vec{R_1}| |\vec{R_3}| \text{sen}(\alpha_{13})} \left(\overline{K_3} - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) - 2r_{3,2}r_2(1 + \eta_{32}) - r_2^2 \right); \end{aligned} \quad (3.104)$$

y como, siempre, $\text{sen}(\alpha_{13}) \neq 0$, entonces la ecuación a considerar ahora para r_2 es

$$\begin{aligned} r_2^2 \left(|\vec{R_1}| |\vec{R_3}| \text{sen}(\alpha_{13}) - |\vec{R_2}| |\vec{R_3}| \text{sen}(\alpha_{23}) - |\vec{R_1}| |\vec{R_2}| \text{sen}(\alpha_{12}) \right) - \\ 2r_2 \left(|\vec{R_2}| |\vec{R_3}| \text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2}(1 + \eta_{12}) + |\vec{R_1}| |\vec{R_2}| \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2}(1 + \eta_{32}) \right) - \\ |\vec{R_1}| |\vec{R_3}| \text{sen}(\alpha_{13}) \overline{K_2} + |\vec{R_2}| |\vec{R_3}| \text{sen}(\alpha_{23}) \left(\overline{K_1} - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) \right) + \end{aligned}$$

$$\left| \vec{R}_1 \right| \left| \vec{R}_2 \right| \sin(\alpha_{12}) (\overline{K}_3 - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32})) = 0. \quad (3.105)$$

Naturalmente, el proceso para determinar la localización espacial se termina llevando las soluciones de r_2 a (3.97) y (3.98) y, finalmente, calculando z con la ecuación de condición en (3.92) siguiendo el procedimiento explicado en la sección anterior.

Ahora bien, a pesar de que este procedimiento es análogo al de esa Sección, y de que, desde el punto de vista analítico, las soluciones a encontrar, válidas físicamente, están sometidas a la misma discusión anterior, conviene que resaltemos dos hechos importantes: el primero es que el procedimiento numérico que se ha de seguir para poder discriminar las soluciones clásicas de las postnewtonianas se hace especialmente dificultoso, ya que los valores de η_{12} y η_{32} que aparecen en (3.105) son muy pequeños comparados con la unidad. De hecho, de acuerdo con las simulaciones numéricas que se muestran en el Capítulo 6, estos términos son habitualmente del orden de 10^{-9} , y esto incide especialmente en el hallazgo de las figuras significativas de las raíces de la ecuación (3.105), así como de las matrices inversas que han de calcularse para hallar las coordenadas x e y del radiotransmisor en cada orden de aproximación. El segundo hecho corresponde a la naturaleza de η_{12} y η_{32} o, bien, si se quiere, a la naturaleza de p_{12} y p_{32} , que son los términos que diferencian a la función de universo postnewtoniana de la función de universo clásica. Estos términos se pueden escribir en otras coordenadas como, por ejemplo, en coordenadas armónicas o de curvatura, como se ha dicho en el Capítulo 1, pero en todo caso, ya que la función de universo es un escalar, sus valores son independientes de las coordenadas utilizadas, y no son otros más que los que permiten describir los retrasos que sufre la señal emitida por el radiotransmisor hasta alcanzar a los satélites S_1 , S_2 y S_3 . Este tipo de retrasos, que fué descubierto por Shapiro, como ya hemos dicho, para el caso de un emisor y un sólo satélite, es muy pequeño, pero puede aumentar cuando aparecen involucrados varios satélites [59]. Por otro lado, pueden aparecer pequeños desacuerdos de carácter numérico cuando se comparan las correcciones postnewtonianas teóricas de las geolocalizaciones clásicas con las localizaciones calculadas con el método que hemos expuesto, como se verá en el Capítulo 6. Finalmente, hemos de señalar que si dos de las soluciones clásicas, r_i y r_j , resultan ser iguales entonces, como el correspondiente término p_{ij} se hace cero en este caso, la ecuación correspondiente a considerar es la ecuación clásica, lo que equivale a eliminar en lo que sigue el correspondiente término η_{ij} .

Por otro lado, si ocurriera que $K_1 = K_2 = K_3$ en los momentos de recepción de la señal, entonces la ecuación (3.105) quedaría en la forma

$$\begin{aligned}
& r_2^2 (\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12})) - \\
& 2r_2 (\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2}(1 + \eta_{12}) + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2}(1 + \eta_{32})) - \\
& \text{sen}(\alpha_{13}) \overline{K} + \text{sen}(\alpha_{23}) (\overline{K} - r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12})) + \text{sen}(\alpha_{12}) (\overline{K} - r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32})) = 0
\end{aligned} \tag{3.106}$$

o, bien, en la forma

$$\begin{aligned}
& r_2^2 (\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12})) - \\
& 2r_2 (\text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2}(1 + \eta_{12}) + \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2}(1 + \eta_{32})) - \\
& \overline{K} (\text{sen}(\alpha_{13}) - \text{sen}(\alpha_{23}) - \text{sen}(\alpha_{12})) - \\
& \text{sen}(\alpha_{23}) r_{1,2}^2(1 + 2\eta_{12}) - \text{sen}(\alpha_{12}) r_{3,2}^2(1 + 2\eta_{32}) = 0,
\end{aligned} \tag{3.107}$$

que es la más útil computacionalmente.

Por otro lado, los términos postnewtonianos p_{12} y p_{32} dados en (3.83) y (3.86) no se pueden utilizar cuando en el momento de emisión el radiotransmisor está en la dirección radial (desde el centro ECI) de cualquier satélite involucrado en el proceso de localización en el momento en que éste recibe la señal. La razón de su invalidez está en que al menos una de esas dos funciones p_{12} y p_{32} no está definida en estas circunstancias. En estos casos se tiene que usar el límite de la ecuación del tiempo para el satélite involucrado, que es

$$\Delta t = r_{TS} + 2m \log \frac{r_S}{r_T}, \tag{3.108}$$

como se puede ver a partir de (2.72), y de aquí podemos calcular las expresiones de p_{12} y p_{32} que hay que usar en ese caso. Así, si el radiotransmisor estuviera alineado con S_2 en el sentido dicho, entonces los valores de p_{12} y p_{32} válidos en este caso son (v., (2.72)):

$$p_{12} = m \left\{ 2 \log \left[\frac{\left(tg \frac{\theta_{T_1}}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{S_1}}{2} \right)} \right] + (\cos \theta_{T_1} - \cos \theta_{S_1}) \right\} + 2m \log \frac{r_{S_2}}{r_T} \tag{3.109}$$

y

$$p_{32} = m \left\{ 2 \log \left[\frac{\left(tg \frac{\theta_{T_3}}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{S_3}}{2} \right)} \right] + (\cos \theta_{T_3} - \cos \theta_{S_3}) \right\} + 2m \log \frac{r_{S_2}}{r_T}. \tag{3.110}$$

En el caso de que el radiotransmisor estuviera alineado con S_1 en el sentido acabado de decir, entonces han de tomarse p_{12} y p_{32} de la siguiente manera (v., (2.72)):

$$p_{12} = 2m \log \frac{r_{S_1}}{r_T} + m \left\{ 2 \log \left[\frac{\left(tg \frac{\theta_{S_2}}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{T_2}}{2} \right)} \right] + (\cos \theta_{T_2} - \cos \theta_{S_2}) \right\} \quad (3.111)$$

y

$$p_{32} = m \left\{ 2 \log \left[\frac{\left(tg \frac{\theta_{T_3}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_{S_2}}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{T_2}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_{S_3}}{2} \right)} \right] + (\cos \theta_{T_3} - \cos \theta_{T_2}) + (\cos \theta_{S_2} - \cos \theta_{S_3}) \right\}; \quad (3.112)$$

y en el caso de que el radiotransmisor estuviera alineado con S_3 en el sentido antedicho, entonces los valores correspondientes que han de tomarse son (v., (2.72)):

$$p_{12} = m \left\{ 2 \log \left[\frac{\left(tg \frac{\theta_{T_1}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_{S_2}}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{T_2}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_{S_1}}{2} \right)} \right] + (\cos \theta_{T_1} - \cos \theta_{T_2}) + (\cos \theta_{S_2} - \cos \theta_{S_1}) \right\} \quad (3.113)$$

y

$$p_{32} = 2m \log \frac{r_{S_3}}{r_T} + m \left\{ 2 \log \left[\frac{\left(tg \frac{\theta_{S_2}}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{T_2}}{2} \right)} \right] + (\cos \theta_{T_2} - \cos \theta_{S_2}) \right\}. \quad (3.114)$$

Ahora nos gustaría añadir a los comentarios hechos en la Introducción y al final del Capítulo 2 que, como se puede ver en (3.83), (3.86), (3.109), (3.110), (3.111), (3.112), (3.113) y (3.114), el efecto “time-delay” de Shapiro para tres satélites es el resultado de las diversas combinaciones de las correcciones postnewtonianas que aparecen en las expresiones referidas, de manera que son estas combinaciones las que dan lugar a los diferentes patrones de comportamiento de las correcciones postnewtonianas de las geolocalizaciones clásicas, patrones que se han conseguido al considerar distribuciones de satélites que reflejan bastante fielmente distribuciones reales, es decir, limitando las variaciones de las doce variables independientes de las que depende la solución del problema y teniendo en cuenta que, como en el caso clásico, las soluciones dependen de estas variables a través de los diversos pseudorángos y, además, y esto es lo más característico de la Geolocalización postnewtoniana, de los ángulos que aparecen en estas fórmulas.

Por otro lado, para encontrar los tres instantes de emisión, t_{pn_i} ($i = 1, 2, 3$), asociados a los satélites S_i correspondientes a la localización espacial, se dispone de las correspondientes soluciones de las ecuaciones del tiempo postnewtonianas. Así, en el caso de que no haya alineación del radiotransmisor con S_1 , la solución para S_1 es (v., (3.79)):

$$t_{pn_1} = t_{S_1} - r_1 - m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_1}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_1}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_1} - \cos \theta_{S_1} \right]; \quad (3.115)$$

por su parte, en caso de que no haya alineación del radiotransmisor con S_2 , la solución para S_2 es (v., (3.80)):

$$t_{pn_2} = t_{S_2} - r_2 - m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_2}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_2}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_2} - \cos \theta_{S_2} \right] \quad (3.116)$$

y, análogamente, en caso de que no haya alineación del radiotransmisor con S_3 , la solución para S_3 es:

$$t_{pn_3} = t_{S_3} - r_3 - m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_3}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_3}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_3} - \cos \theta_{S_3} \right]. \quad (3.117)$$

Y, finalmente, en caso de que hubiera alineación con S_1 , S_2 o S_3 , las soluciones para cada satélite son, respectivamente (v., (3.108)):

$$t_{pn_1} = t_{S_1} - r_1 - 2m \log \frac{r_{S_1}}{r_T}, \quad (3.118)$$

$$t_{pn_2} = t_{S_2} - r_2 - 2m \log \frac{r_{S_2}}{r_T}, \quad (3.119)$$

$$t_{pn_3} = t_{S_3} - r_3 - 2m \log \frac{r_{S_3}}{r_T}, \quad (3.120)$$

donde, como siempre, todas las magnitudes en los segundos miembros de estas soluciones que conciernen al radiotransmisor corresponden a su geolocalización newtoniana.

De esta manera, alcanzamos la siguiente conclusión (que es propia de la TGR): mientras que a la localización espacial newtoniana le corresponde el (único) instante de emisión, t_{cl} , dado por (3.34), (3.35) o por (3.36), es decir, por cualquiera de las tres siguientes expresiones:

$$t_{cl} = t_{S_1} - r_1, \quad (3.121)$$

$$t_{cl} = t_{S_2} - r_2, \quad (3.122)$$

$$t_{cl} = t_{S_3} - r_3, \quad (3.123)$$

para la localización postnewtoniana tenemos en cambio las fórmulas (3.115)-(3.117), que corresponden a los instantes de emisión, t_{pn_i} . Estos instantes son, en general, distintos debido a que el efecto "time delay" de Shapiro es diferente para cada satélite; y de aquí se deduce que las relaciones temporales entre los instantes de emisión de la señal previstos de acuerdo con los modelos newtoniano y postnewtoniano para los tres satélites, tanto cuando hay alineaciones como cuando no las hay, son, también en general, diferentes. Así, cuando no hay alineaciones tenemos que

$$t_{pn_1} = t_{cl} - m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_1}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_1}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_1} - \cos \theta_{S_1} \right], \quad (3.124)$$

$$t_{pn_2} = t_{cl} - m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_2}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_2}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_2} - \cos \theta_{S_2} \right], \quad (3.125)$$

$$t_{pn_3} = t_{cl} - m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_3}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_3}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_3} - \cos \theta_{S_3} \right], \quad (3.126)$$

y cuando hay alineaciones tenemos que

$$t_{pn_1} = t_{cl} - 2m \log \frac{r_{S_1}}{r_T}, \quad (3.127)$$

$$t_{pn_2} = t_{cl} - 2m \log \frac{r_{S_2}}{r_T}, \quad (3.128)$$

$$t_{pn_3} = t_{cl} - 2m \log \frac{r_{S_3}}{r_T}, \quad (3.129)$$

lo que proporciona las siguientes relaciones entre los tiempos invertidos por la señal emitida por el radiotransmisor hasta alcanzar a los tres satélites; primero, cuando no hay alineaciones:

$$(t_{S_1} - t_{pn_1}) = (t_{S_1} - t_{cl}) + m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_1}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_1}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_1} - \cos \theta_{S_1} \right], \quad (3.130)$$

$$(t_{S_2} - t_{pn_2}) = (t_{S_2} - t_{cl}) + m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_2}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_2}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_2} - \cos \theta_{S_2} \right], \quad (3.131)$$

$$(t_{S_3} - t_{pn_3}) = (t_{S_3} - t_{cl}) + m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_3}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_3}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_3} - \cos \theta_{S_3} \right], \quad (3.132)$$

y, segundo, cuando hay alineaciones:

$$(t_{S_1} - t_{pn_1}) = (t_{S_1} - t_{cl}) + 2m \log \frac{r_{S_1}}{r_T}, \quad (3.133)$$

$$(t_{S_2} - t_{pn_2}) = (t_{S_2} - t_{cl}) + 2m \log \frac{r_{S_2}}{r_T}, \quad (3.134)$$

$$(t_{S_3} - t_{pn_3}) = (t_{S_3} - t_{cl}) + 2m \log \frac{r_{S_3}}{r_T}, \quad (3.135)$$

donde se pone claramente de manifiesto el efecto “time-delay” de Shapiro para cada uno de los tres satélites.

En el Capítulo 6 se presenta alguno de estos efectos (a veces, todos) para las diferentes simulaciones numéricas junto con las correspondientes localizaciones espaciales.

Capítulo 4

Ecuaciones de Geolocalización por TDOA para cuatro satélites

4.1. Ecuaciones en la aproximación newtoniana (Relatividad Especial)

4.1.1. El caso de tres satélites no ecuatoriales

Como se verá a continuación, el método descrito en el capítulo anterior, o bien no se puede utilizar o, bien, en el mejor de los casos resulta claramente ineficiente cuando alguno de los tres satélites a utilizar deja de ser ecuatorial.

En efecto, supongamos que partimos de las mismas ecuaciones de las que partimos anteriormente, que son

$$\begin{aligned}r_{1,2} &= r_1 - r_2, \\ r_{3,2} &= r_3 - r_2,\end{aligned}\tag{4.1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}r_1 &= r_{1,2} + r_2, \\ r_3 &= r_{3,2} + r_2,\end{aligned}\tag{4.2}$$

y las elevamos al cuadrado para obtener

$$\begin{aligned}r_1^2 &= r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2, \\ r_3^2 &= r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2,\end{aligned}\tag{4.3}$$

como también hicimos anteriormente.

Entonces, si suponemos ahora que algún z_i puede ser diferente de cero tendremos que, al menos para un i ,

$$r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2, \quad (4.4)$$

y puesto que

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_E^2, \quad (4.5)$$

ya que seguimos suponiendo que el radiotransmisor está sobre la superficie de la Tierra, tenemos cuatro posibilidades como sistema lineal a considerar, que son : a) $z_1 \neq 0$ y $z_3 \neq 0$; b) $z_1 = 0$ y $z_3 \neq 0$; c) $z_1 \neq 0$ y $z_3 = 0$ y d) $z_1 = 0$ y $z_3 = 0$.

Pues bien, para el primer caso el sistema análogo al sistema en (3.19) es

$$\begin{aligned} 2xx_1 + 2yy_1 + 2zz_1 &= R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2, \\ 2xx_3 + 2yy_3 + 2zz_3 &= R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 - 2zz_1 \\ R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 - 2zz_3 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

de donde se deduce que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \begin{pmatrix} y_3 & -y_1 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_1 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 - 2zz_1 \\ K_3 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 - 2zz_3 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

es decir, que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(x_1y_3 - x_3y_1)} \begin{pmatrix} y_3 & -y_1 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 - 2zz_1 \\ \bar{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 - 2zz_3 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

donde

$$r_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2. \quad (4.10)$$

Ahora bien, si ocurriera también que $z_2 \neq 0$ entonces, teniendo en cuenta (4.1), la ecuación anterior para r_2 quedaría en la forma

$$r_2^2 = x^2 - 2xx_2 - 2yy_2 - 2zz_2 + y^2 + z^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

o, lo que es lo mismo,

$$r_2^2 = R^2 + r_E^2 - 2 \left(xx_2 + 2yy_2 \pm \sqrt{r_E^2 - x^2 - y^2} \right) z_2, \quad (4.11)$$

lo que daría lugar, al sustituir en (4.11) los valores de x e y dados en (4.9), a infinitas soluciones ya que x e y dependen de z . Y si, por el contrario, $z_2 = 0$ entonces en este caso también obtendríamos infinitas soluciones (de acuerdo con (4.10)) ya que ahora las ecuaciones para r_2 serían de la forma

$$r_2^2 = R^2 + r_E^2 - 2(xx_2 + 2yy_2). \quad (4.12)$$

En el segundo caso, si $z_2 \neq 0$ entonces el sistema es

$$\begin{aligned} 2xx_1 + 2yy_1 &= R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2, \\ 2xx_3 + 2yy_3 &= R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 - 2zz_3, \end{aligned} \quad (4.13)$$

y nuevamente tendríamos las infinitas ecuaciones siguientes

$$r_2^2 = R^2 + r_E^2 - 2 \left(xx_2 + 2yy_2 \pm \sqrt{r_E^2 - x^2 - y^2} \right) z_2, \quad (4.14)$$

ya que, igual que antes, x e y dependen de z , como se ve en (4.13). Y en caso de que $z_2 = 0$, entonces, como el sistema sigue siendo el mismo, para r_2 tenemos

$$r_2^2 = R^2 + r_E^2 - 2(xx_2 + 2yy_2), \quad (4.15)$$

que, otra vez, depende de z a través de x e y .

En el tercer caso, si $z_2 \neq 0$ el sistema a considerar es

$$\begin{aligned} 2xx_1 + 2yy_1 &= R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 - 2zz_1, \\ 2xx_3 + 2yy_3 &= R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

y las ecuaciones para r_2 son

$$r_2^2 = R^2 + r_E^2 - 2 \left(xx_2 + 2yy_2 \pm \sqrt{r_E^2 - x^2 - y^2} \right) z_2, \quad (4.17)$$

que, de nuevo, dependen de z a través de x e y ; y en el caso de que $z_2 = 0$ entonces las ecuaciones para r_2 serían de la forma

$$r_2^2 = R^2 + r_E^2 - 2(xx_2 + 2yy_2), \quad (4.18)$$

que también dependen de z a través de x e y .

Finalmente, en el último caso sólo tenemos que analizar el método cuando $z_2 \neq 0$, ya que si $z_2 = 0$ entonces esta situación correspondería a la que se ha estudiado en el Capítulo 3. Pues bien, en este caso tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2xx_1 + 2yy_1 &= R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2, \\ 2xx_3 + 2yy_3 &= R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

y para r_2 tenemos las ecuaciones

$$r_2^2 = R^2 + r_E^2 - 2 \left(xx_2 + 2yy_2 \pm \sqrt{r_E^2 - x^2 - y^2} \right) z_2 \quad (4.20)$$

que, al no depender de z , pueden dar lugar a cuatro soluciones o, lo que es lo mismo, a ocho posibles localizaciones, con lo cual el método termina siendo, incluso en este caso, muy ineficiente.

4.1.2. Cuatro satélites ecuatoriales

En vista del resultado anterior sólo queda la posibilidad de estudiar la eficiencia del método aumentando el número de satélites, y esto es lo que hacemos a continuación, primero, suponiendo que disponemos de cuatro satélites que son (todos) ecuatoriales y, después, suponiendo que alguno de ellos no es ecuatorial.

Consideremos, pues, cuatro satélites de manera que $z_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Entonces, tomando nuevamente al satélite 2 como pivote, podemos considerar las tres ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= r_1 - r_2, \\ r_{3,2} &= r_3 - r_2, \\ r_{4,2} &= r_4 - r_2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

o, lo que es lo mismo,

$$r_1 = r_{1,2} + r_2,$$

$$\begin{aligned}
r_3 &= r_{3,2} + r_2, \\
r_4 &= r_{4,2} + r_2.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ahora, siguiendo con el procedimiento anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
r_1^2 &= r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2, \\
r_3^2 &= r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2, \\
r_4^2 &= r_{4,2}^2 + 2r_{4,2}r_2 + r_2^2,
\end{aligned}$$

$$r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + z^2, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_E^2,$$

y de aquí se deduce que

$$\begin{aligned}
2xx_1 + 2yy_1 &= R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2, \\
2xx_3 + 2yy_3 &= R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2, \\
2xx_4 + 2yy_4 &= R^2 + r_E^2 - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

que es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Por tanto, lo más que se puede hacer en esta circunstancia es construir tres sistemas de dos ecuaciones: uno para los satélites S_1 , S_2 y S_3 ; otro para los satélites S_1 , S_2 , S_4 y, finalmente, otro para los satélites S_3 , S_2 , S_4 , con lo cual se podría aplicar para cada terna el método descrito en el capítulo anterior y el resultado, importante desde el punto de vista práctico, es que se podría aumentar el número de resultados de localización, no sólo porque se puede incrementar el número de mediciones para cada terna, como ya ocurría en el caso anterior, sino porque aumenta el número de ternas de satélites.

4.1.3. Cuatro satélites no ecuatoriales

Supongamos ahora que para alguno de los cuatro satélites, S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , la componente z es distinta de cero. Entonces tenemos de nuevo

$$\begin{aligned}
r_{1,2} &= r_1 - r_2, \\
r_{3,2} &= r_3 - r_2, \\
r_{4,2} &= r_4 - r_2,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

y

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{1,2} + r_2, \\ r_3 &= r_{3,2} + r_2, \\ r_4 &= r_{4,2} + r_2, \end{aligned} \tag{4.25}$$

de manera que

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2, \\ r_3^2 &= r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2, \\ r_4^2 &= r_{4,2}^2 + 2r_{4,2}r_2 + r_2^2, \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde, al menos para algún i ,

$$r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2, \tag{4.27}$$

con $z_i \neq 0$.

Para resolver este sistema consideramos otra vez la ecuación de condición de que el observador está sobre la superficie de la Tierra, esto es,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_E^2$$

y, nuevamente, denotamos $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ por K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) donde, de momento,

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = R^2.$$

Entonces, desarrollando (4.27) tenemos que

$$\begin{aligned} r_i^2 &= x^2 - 2xx_i - 2yy_i - 2zz_i + y^2 + z^2 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = \\ &K_i - 2xx_i - 2yy_i - 2zz_i + r_E^2 \end{aligned} \tag{4.28}$$

y, si sustituimos r_1^2, r_3^2, r_4^2 por su definición, tenemos que

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 &= r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 &= r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2, \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 &= r_{4,2}^2 + 2r_{4,2}r_2 + r_2^2, \end{aligned} \tag{4.29}$$

o, lo que es lo mismo,

$$R^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + r_E^2 = r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2,$$

$$\begin{aligned}
R^2 - 2xx_3 - 2yy_3 - 2zz_3 + r_E^2 &= r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2, \\
R^2 - 2xx_4 - 2yy_4 - 2zz_4 + r_E^2 &= r_{4,2}^2 + 2r_{4,2}r_2 + r_2^2,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

de manera que nuestro sistema ahora es

$$\begin{aligned}
2xx_1 + 2yy_1 + 2zz_1 &= R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2, \\
2xx_3 + 2yy_3 + 2zz_3 &= R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2, \\
2xx_4 + 2yy_4 + 2zz_4 &= R^2 + r_E^2 - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 \\ R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 \\ R^2 + r_E^2 - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2 \end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

lo que da lugar a las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2|A|} [(y_3z_4 - y_4z_3) (R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (y_4z_1 - y_1z_4) (R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + (y_1z_3 - y_3z_1) \times \\
&\quad (R^2 + r_E^2 - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)], \\
y &= \frac{1}{2|A|} [(z_3x_4 - z_4x_3) (R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (z_4x_1 - z_1x_4) (R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + (z_1x_3 - z_3x_1) \times \\
&\quad (R^2 + r_E^2 - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)], \\
z &= \frac{1}{2|A|} [(x_3y_4 - x_4y_3) (R^2 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (x_4y_1 - x_1y_4) (R^2 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + (x_1y_3 - x_3y_1) \times \\
&\quad (R^2 + r_E^2 - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)],
\end{aligned} \tag{4.33}$$

o, bien, a

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2|A|} [(y_3z_4 - y_4z_3) (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&(y_4z_1 - y_1z_4) (\overline{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + (y_1z_3 - y_3z_1) \times \\
&(\overline{K} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)] , \\
y &= \frac{1}{2|A|} [(z_3x_4 - z_4x_3) (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&(z_4x_1 - z_1x_4) (\overline{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + (z_1x_3 - z_3x_1) \times \\
&(\overline{K} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)] , \\
z &= \frac{1}{2|A|} [(x_3y_4 - x_4y_3) (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&(x_4y_1 - x_1y_4) (\overline{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + (x_1y_3 - x_3y_1) \times \\
&(\overline{K} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)] ,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

donde A es la matriz de los coeficientes del sistema.

Si ahora se sustituyen x, y y z en

$$r_2^2 = \overline{K} - 2xx_2 - 2yy_2 - 2zz_2 \tag{4.35}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
r_2^2 &= \overline{K} - \frac{x_2}{|A|} [(y_3z_4 - y_4z_3) (\overline{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&(y_4z_1 - y_1z_4) (\overline{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + (y_1z_3 - y_3z_1) (\overline{K} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{y_2}{|A|} \left[(z_3x_4 - z_4x_3) (\bar{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \right. \\
& (z_4x_1 - z_1x_4) (\bar{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + (z_1x_3 - z_3x_1) (\bar{K} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2) \left. \right] - \\
& \frac{z_2}{|A|} \left[(x_3y_4 - x_4y_3) (\bar{K} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) \right. \\
& (x_4y_1 - x_1y_4) (\bar{K} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + (x_1y_3 - x_3y_1) (\bar{K} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2) \left. \right], \tag{4.36}
\end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}
& r_2^2 \left[1 - \frac{1}{|A|} \left[x_2 (y_3z_4 - y_4z_3) + y_2 (z_3x_4 - z_4x_3) + z_2 (x_3y_4 - x_4y_3) + \right. \right. \\
& \quad x_2 (y_4z_1 - y_1z_4) + y_2 (z_4x_1 - z_1x_4) + z_2 (x_4y_1 - x_1y_4) + \\
& \quad \left. \left. x_2 (y_1z_3 - y_3z_1) + y_2 (z_1x_3 - z_3x_1) + z_2 (x_1y_3 - x_3y_1) \right] \right] - \\
& r_2 \frac{2}{|A|} \left[r_{1,2} \left[x_2 (y_3z_4 - y_4z_3) + y_2 (z_3x_4 - z_4x_3) + z_2 (x_3y_4 - x_4y_3) \right] + \right. \\
& \quad r_{3,2} \left[x_2 (y_4z_1 - y_1z_4) + y_2 (z_4x_1 - z_1x_4) + z_2 (x_4y_1 - x_1y_4) \right] + \\
& \quad \left. r_{4,2} \left[x_2 (y_1z_3 - y_3z_1) + y_2 (z_1x_3 - z_3x_1) + z_2 (x_1y_3 - x_3y_1) \right] \right] - \\
& \bar{K} + \frac{(\bar{K} - r_{1,2}^2)}{|A|} \left[x_2 (y_3z_4 - y_4z_3) + y_2 (z_3x_4 - z_4x_3) + z_2 (x_3y_4 - x_4y_3) \right] + \\
& \frac{(\bar{K} - r_{3,2}^2)}{|A|} \left[x_2 (y_4z_1 - y_1z_4) + y_2 (z_4x_1 - z_1x_4) + z_2 (x_4y_1 - x_1y_4) \right] + \\
& \frac{(\bar{K} - r_{4,2}^2)}{|A|} \left[x_2 (y_1z_3 - y_3z_1) + y_2 (z_1x_3 - z_3x_1) + z_2 (x_1y_3 - x_3y_1) \right] = 0. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Pues bien, si designamos por s_i al vector (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3, 4$, y por $[s_i, s_j, s_k]$ al producto mixto de los vectores de posición de los satélites s_i , s_j y s_k , tenemos que

$$\begin{aligned}
& r_2^2 \left(1 - \frac{[s_2, s_3, s_4]}{|A|} - \frac{[s_1, s_2, s_4]}{|A|} - \frac{[s_1, s_3, s_2]}{|A|} \right) - \\
& r_2 \frac{2}{|A|} (r_{1,2} [s_2, s_3, s_4] + r_{3,2} [s_1, s_2, s_4] + r_{4,2} [s_1, s_3, s_2]) - \bar{K} +
\end{aligned}$$

$$\frac{(\overline{K} - r_{1,2}^2)}{|A|} [s_2, s_3, s_4] + \frac{(\overline{K} - r_{3,2}^2)}{|A|} [s_1, s_2, s_4] + \frac{(\overline{K} - r_{4,2}^2)}{|A|} [s_1, s_3, s_2] = 0 \quad (4.38)$$

o, bien, ya que $|A| = [s_1, s_3, s_4] \neq 0$,

$$\begin{aligned} & r_2^2 ([s_1, s_3, s_4] - [s_2, s_3, s_4] - [s_1, s_2, s_4] - [s_1, s_3, s_2]) - \\ & 2r_2 [r_{1,2} [s_2, s_3, s_4] + r_{3,2} [s_1, s_2, s_4] + r_{4,2} [s_1, s_3, s_2]] - \\ & \overline{K} [s_1, s_3, s_4] + (\overline{K} - r_{1,2}^2) [s_2, s_3, s_4] + (\overline{K} - r_{3,2}^2) [s_1, s_2, s_4] + \\ & (\overline{K} - r_{4,2}^2) [s_1, s_3, s_2] = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} & r_2^2 ([s_1, s_3, s_4] - [s_2, s_3, s_4] - [s_1, s_2, s_4] - [s_1, s_3, s_2]) - \\ & 2r_2 [r_{1,2} [s_2, s_3, s_4] + r_{3,2} [s_1, s_2, s_4] + r_{4,2} [s_1, s_3, s_2]] - \\ & \overline{K} ([s_1, s_3, s_4] - [s_2, s_3, s_4] - [s_1, s_2, s_4] - [s_1, s_3, s_2]) - \\ & (r_{1,2}^2 [s_2, s_3, s_4] + r_{3,2}^2 [s_1, s_2, s_4] + r_{4,2}^2 [s_1, s_3, s_2]) = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Supongamos ahora que $K_1 \neq K_2 \neq K_3 \neq K_4$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= r_1 - r_2, \\ r_{3,2} &= r_3 - r_2, \\ r_{4,2} &= r_4 - r_2, \end{aligned} \quad (4.41)$$

y, por lo tanto, que

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{1,2} + r_2, \\ r_3 &= r_{3,2} + r_2, \\ r_4 &= r_{4,2} + r_2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Así que ahora tenemos que

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2, \\ r_3^2 &= r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2, \\ r_4^2 &= r_{4,2}^2 + 2r_{4,2}r_2 + r_2^2, \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde

$$r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2. \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4.44)$$

Para obtener el nuevo sistema consideramos las ecuaciones (4.41) y la ecuación de condición de que el observador está sobre la superficie de la Tierra, es decir,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_E^2.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} r_i^2 &= x^2 - 2xx_i - 2yy_i - 2zz_i + y^2 + z^2 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = \\ &K_i - 2xx_i - 2yy_i - 2zz_i + r_E^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

y, de aquí, que

$$\begin{aligned} K_1 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + r_E^2 &= r_{1,2}^2 + 2r_{1,2}r_2 + r_2^2, \\ K_3 - 2xx_3 - 2yy_3 - 2zz_3 + r_E^2 &= r_{3,2}^2 + 2r_{3,2}r_2 + r_2^2, \\ K_4 - 2xx_4 - 2yy_4 - 2zz_4 + r_E^2 &= r_{4,2}^2 + 2r_{4,2}r_2 + r_2^2. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Entonces, el sistema ahora es:

$$\begin{aligned} 2xx_1 + 2yy_1 + 2zz_1 &= K_1 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2, \\ 2xx_3 + 2yy_3 + 2zz_3 &= K_3 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2, \\ 2xx_4 + 2yy_4 + 2zz_4 &= K_4 + r_E^2 - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2, \end{aligned} \quad (4.47)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K_1 + r_E^2 - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2 \\ K_3 + r_E^2 - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2 \\ K_4 + r_E^2 - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2 \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2|A|} [(y_3z_4 - y_4z_3) (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\ &(y_4z_1 - y_1z_4) (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + \\ &(y_1z_3 - y_3z_1) (\overline{K_4} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2|A|} [(z_3x_4 - z_4x_3) (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (z_4x_1 - z_1x_4) (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (z_1x_3 - z_3x_1) (\overline{K_4} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)] , \\
z &= \frac{1}{2|A|} [(x_3y_4 - x_4y_3) (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (x_4y_1 - x_1y_4) (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + (x_1y_3 - x_3y_1) \times \\
&\quad (\overline{K_4} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (x_1y_3 - x_3y_1) (\overline{K_4} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)] . \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora x, y y z en

$$r_2^2 = \overline{K_2} - 2xx_2 - 2yy_2 - 2zz_2$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
r_2^2 &= \overline{K_2} - \frac{x_2}{|A|} [(y_3z_4 - y_4z_3) (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (y_4z_1 - y_1z_4) (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (y_1z_3 - y_3z_1) (\overline{K_4} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)] - \\
&\quad \frac{y_2}{|A|} [(z_3x_4 - z_4x_3) (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (z_4x_1 - z_1x_4) (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (z_1x_3 - z_3x_1) (\overline{K_4} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)] - \\
&\quad \frac{z_2}{|A|} [(x_3y_4 - x_4y_3) (\overline{K_1} - r_{1,2}^2 - 2r_{1,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (x_4y_1 - x_1y_4) (\overline{K_3} - r_{3,2}^2 - 2r_{3,2}r_2 - r_2^2) + \\
&\quad (x_1y_3 - x_3y_1) (\overline{K_4} - r_{4,2}^2 - 2r_{4,2}r_2 - r_2^2)] \tag{4.50}
\end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}
&r_2^2 ([s_1, s_3, s_4] - [s_2, s_3, s_4] - [s_1, s_2, s_4] - [s_1, s_3, s_2]) - \\
&2r_2 [r_{1,2} [s_2, s_3, s_4] + r_{3,2} [s_1, s_2, s_4] + r_{4,2} [s_1, s_3, s_2]] - \overline{K_2} [s_1, s_3, s_4]
\end{aligned}$$

$$+ (\overline{K_1} - r_{1,2}^2) [s_2, s_3, s_4] + (\overline{K_3} - r_{3,2}^2) [s_1, s_2, s_4] + (\overline{K_4} - r_{4,2}^2) [s_1, s_3, s_2] = 0, \quad (4.51)$$

que es la ecuación que generaliza la ecuación en (4.40).

Como se ve, en ambos casos permanece la ambigüedad de la localización puesto que, aunque los sistemas (4.32) y (4.48) dan las soluciones únicas mostradas en (4.34) y en (4.49), respectivamente, la ecuación para r_2 en cambio, sea ésta la ecuación en (4.40) o la ecuación en (4.51), tiene en general dos soluciones.

Así pues, hasta ahora el tratamiento del problema se puede resumir de la siguiente manera: La mejora hecha del primer método de Ho y Chan (que sólo se puede aplicar cuando el radiotransmisor está sobre la superficie de la Tierra) sólo es eficiente en dos casos, que son: 1) cuando se utilizan tres ó más satélites ecuatoriales (en particular, geoestacionarios) y 2) cuando se utilizan cuatro ó más satélites no ecuatoriales. Para el primer caso hay que resolver ecuaciones de la forma dada en (3.19) y (3.67) y, para el segundo, las ecuaciones son de la forma dada en (4.46). Por lo tanto, si en el primer caso se utilizan más de tres satélites entonces estos han de agruparse de tres en tres y, en el segundo caso, si se utilizan más de cuatro satélites, estos habrán de agruparse de cuatro en cuatro. En ambos casos, en general, el mínimo número de localizaciones es dos.

Así que, antes de mostrar el método que hemos desarrollado para obtener las soluciones únicas (v. Capítulo 5) vamos a mostrar, primero, el análisis que hemos hecho del segundo método de Ho y Chan, el cual, aunque es computacionalmente más complejo que el primero, ofrece la ventaja de que con él no se necesita suponer que el radiotransmisor esté sobre la superficie de la Tierra. Como se verá a continuación, resulta que, tal como está descrito en [3], este método tampoco resulta muy eficiente. De hecho, no es más eficiente que el anterior cuando se utilizan sólo cuatro satélites con el primer método, aunque permite una salida airosa, como veremos finalmente.

En efecto, en este método las ecuaciones a considerar se basan en las siguientes identidades ($c = 1$) :

$$r_{i,k} + r_{k,j} - r_{i,j} = 0, \quad r_{i+1,i} = r_{i+1} - r_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.52)$$

de forma que el sistema inicial (no lineal) es

$$\begin{aligned} r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1} &= 0, \\ r_{4,3} + r_{3,1} - r_{4,1} &= 0, \\ r_{4,2} + r_{2,1} - r_{4,1} &= 0, \\ r_{4,3} + r_{3,2} - r_{4,2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Ahora se multiplican los tres sumandos en cada ecuación para obtener

$$\begin{aligned}
r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= (r_3 - r_2)(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) = r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2, \\
r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} &= (r_4 - r_2)(r_3 - r_1)(r_4 - r_1) = r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2, \\
r_{4,2}r_{2,1}r_{4,1} &= (r_4 - r_2)(r_2 - r_1)(r_4 - r_1) = r_{4,2}r_1^2 + r_{2,1}r_4^2 - r_{4,1}r_2^2, \\
r_{4,3}r_{3,2}r_{4,2} &= (r_4 - r_3)(r_3 - r_2)(r_4 - r_2) = r_{4,3}r_2^2 + r_{3,2}r_4^2 - r_{4,2}r_3^2 \quad (4.54)
\end{aligned}$$

y, finalmente, se sustituye r_i^2 por $(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Como se ve, para obtener estas ecuaciones no se impone ninguna restricción sobre la naturaleza de los satélites, así que, operando, resulta que el correspondiente sistema lineal es:

$$r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} = l_1 + m_1x + n_1y + v_1z, \quad (4.55)$$

$$r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} = l_2 + m_2x + n_2y + v_2z, \quad (4.56)$$

$$r_{4,2}r_{2,1}r_{4,1} = l_3 + m_3x + n_3y + v_3z, \quad (4.57)$$

$$r_{4,3}r_{3,2}r_{4,2} = l_4 + m_4x + n_4y + v_4z, \quad (4.58)$$

donde

$$l_1 = r_{3,2}K_1 + r_{2,1}K_3 - r_{3,1}K_2,$$

$$l_2 = r_{4,3}K_1 + r_{3,1}K_4 - r_{4,1}K_3,$$

$$l_3 = r_{4,2}K_1 + r_{2,1}K_4 - r_{4,1}K_2,$$

$$l_4 = r_{4,3}K_2 + r_{3,2}K_4 - r_{4,2}K_3;$$

$$m_1 = (-2)(r_{3,2}x_1 + r_{2,1}x_3 - r_{3,1}x_2),$$

$$m_2 = (-2)(r_{4,3}x_1 + r_{3,1}x_4 - r_{4,1}x_3),$$

$$m_3 = (-2)(r_{4,2}x_1 + r_{2,1}x_4 - r_{4,1}x_2),$$

$$m_4 = (-2)(r_{4,3}x_2 + r_{3,2}x_4 - r_{4,2}x_3);$$

$$n_1 = (-2)(r_{3,2}y_1 + r_{2,1}y_3 - r_{3,1}y_2),$$

$$n_2 = (-2)(r_{4,3}y_1 + r_{3,1}y_4 - r_{4,1}y_3),$$

$$n_3 = (-2)(r_{4,2}y_1 + r_{2,1}y_4 - r_{4,1}y_2),$$

$$n_4 = (-2)(r_{4,3}y_2 + r_{3,2}y_4 - r_{4,2}y_3);$$

y

$$\begin{aligned}v_1 &= (-2)(r_{3,2}z_1 + r_{2,1}z_3 - r_{3,1}z_2), \\v_2 &= (-2)(r_{4,3}z_1 + r_{3,1}z_4 - r_{4,1}z_3), \\v_3 &= (-2)(r_{4,2}z_1 + r_{2,1}z_4 - r_{4,1}z_2), \\v_4 &= (-2)(r_{4,3}z_2 + r_{3,2}z_4 - r_{4,2}z_3).\end{aligned}$$

Es inmediato ver ahora que este sistema contiene cuatro ecuaciones para las incógnitas x, y y z . Pero ocurre, en realidad, que estas ecuaciones no son independientes ya que, como se puede comprobar, la ecuación en (4.55) más la ecuación en (4.56) menos la ecuación en (4.57) da como resultado la ecuación en (4.58) y, además, $r_{4,1}(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}) + r_{2,1}(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}) = r_{3,1}(r_{4,2}r_{2,1}r_{4,1})$, por lo que resulta que la 3ª y la 4ª ecuación son combinación lineal de las ecuaciones 1ª y 2ª, lo que nos permite eliminar las dos últimas. Por lo tanto el sistema (4.55)-(4.58) se reduce a

$$\begin{aligned}r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= l_1 + m_1x + n_1y + v_1z, \\r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} &= l_2 + m_2x + n_2y + v_2z,\end{aligned}\tag{4.59}$$

o, lo que es lo mismo, a

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} - l_1 - v_1z \\ r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} - l_2 - v_2z \end{pmatrix},\tag{4.60}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\det(A)} [n_2(p_1 - l_1) - n_1(p_2 - l_2) + (n_1v_2 - n_2v_1)z], \\y &= \frac{1}{\det(A)} [-m_2(p_1 - l_1) + m_1(p_2 - l_2) + (m_2v_1 - m_1v_2)z],\end{aligned}\tag{4.61}$$

donde A es la matriz de los coeficientes del sistema; $p_1 = r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}$ y $p_2 = r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}$. Ahora, elevando al cuadrado x e y y calculando el producto xy tenemos que

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{1}{\det^2(A)} [n_2^2(p_1 - l_1)^2 + n_1^2(p_2 - l_2)^2 + (n_1v_2 - n_2v_1)^2z^2 + \\&\quad 2n_2(p_1 - l_1)(n_1v_2 - n_2v_1)z - \\&\quad 2n_2n_1(p_1 - l_1)(p_2 - l_2) - 2n_1(p_2 - l_2)(n_1v_2 - n_2v_1)z], \\y^2 &= \frac{1}{\det^2(A)} [m_2^2(p_1 - l_1)^2 + m_1^2(p_2 - l_2)^2 + (m_2v_1 - m_1v_2)^2z^2 - \\&\quad 2m_2(p_1 - l_1)(m_1v_2 - m_2v_1)z - \\&\quad 2m_1m_2(p_1 - l_1)(p_2 - l_2) - 2m_1(p_2 - l_2)(m_1v_2 - m_2v_1)z]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2m_2(p_1 - l_1)(m_2v_1 - m_1v_2)z - \\
& -2m_2m_1(p_1 - l_1)(p_2 - l_2) + 2m_1(p_2 - l_2)(m_2v_1 - m_1v_2)z] \quad (4.62)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
xy = \frac{1}{\det^2(A)} & [-m_2n_2(p_1 - l_1)^2 + n_2m_1(p_1 - l_1)(p_2 - l_2) + \\
& n_2(p_1 - l_1)(m_2v_1 - m_1v_2)z + \\
& m_2n_1(p_1 - l_1)(p_2 - l_2) - m_1n_1(p_2 - l_2)^2 - n_1(p_2 - l_2)(m_2v_1 - m_1v_2)z - \\
& m_2(p_1 - l_1)(n_1v_2 - n_2v_1)z + \\
& m_1(p_2 - l_2)(n_1v_2 - n_2v_1)z + (n_1v_2 - n_2v_1)(m_2v_1 - m_1v_2)z^2], \quad (4.63)
\end{aligned}$$

de manera que, si se tiene en cuenta que $r_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$ ($i = 1, 2, 3, 4$), resulta que

$$\begin{aligned}
r_{2,1} &= r_2 - r_1 = [(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2]^{\frac{1}{2}} - \\
& [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.64)
\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$r_{2,1}^4 + (a - b)^2 - 2r_{2,1}^2(a + b) = 0, \quad (4.65)$$

donde

$$\begin{aligned}
a &= (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2 \\
b &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2.
\end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned}
a - b &= (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2 = \\
& k_2^2 - k_1^2 + 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(z_1 - z_2)z,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
(a - b)^2 &= k_2^4 + k_1^4 + 4(x_1 - x_2)^2 x^2 + 4(y_1 - y_2)^2 y^2 + 4(z_1 - z_2)^2 z^2 + \\
& 4k_2^2(x_1 - x_2)x - 2k_2^2k_1^2 + \\
& 4k_2^2(y_1 - y_2)y + 4k_2^2(z_1 - z_2)z - 4k_1^2(x_1 - x_2)x - \\
& 4k_1^2(y_1 - y_2)y - 4k_1^2(z_1 - z_2)z +
\end{aligned}$$

$$8(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)xy + 8(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)xz + 8(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)yz;$$

y como, por otro lado,

$$a + b = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2 + (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 =$$

$$k_2^2 + k_1^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2(x_1 + x_2)x - 2(y_1 + y_2)y - 2(z_1 + z_2)z,$$

finalmente tenemos que la ecuación en (4.65) se reduce a

$$r_{2,1}^4 + (a - b)^2 - 2r_{2,1}^2(a + b) = r_{2,1}^4 + k_2^4 + k_1^4 + 4(x_1 - x_2)^2 x^2 + 4(y_1 - y_2)^2 y^2 +$$

$$4(z_1 - z_2)^2 z^2 + 4k_2^2(x_1 - x_2)x - 2k_2^2 k_1^2 +$$

$$4k_2^2(y_1 - y_2)y + 4k_2^2(z_1 - z_2)z - 4k_1^2(x_1 - x_2)x -$$

$$4k_1^2(y_1 - y_2)y - 4k_1^2(z_1 - z_2)z +$$

$$8(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)xy + 8(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)xz + 8(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)yz -$$

$$2r_{2,1}^2(k_2^2 + k_1^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2(x_1 + x_2)x - 2(y_1 + y_2)y - 2(z_1 + z_2)z) = 0$$

(4.66)

o, lo que es lo mismo, a

$$r_{2,1}^4 + (k_2^2 - k_1^2)^2 + 4x^2((x_1 - x_2)^2 - r_{2,1}^2) + 4y^2((y_1 - y_2)^2 - r_{2,1}^2) +$$

$$4z^2((z_1 - z_2)^2 - r_{2,1}^2) +$$

$$4x[(k_2^2 - k_1^2)(x_1 - x_2) + r_{2,1}^2(x_1 + x_2)] +$$

$$4y[(k_2^2 - k_1^2)(y_1 - y_2) + r_{2,1}^2(y_1 + y_2)] +$$

$$4z[(k_2^2 - k_1^2)(z_1 - z_2) + r_{2,1}^2(z_1 + z_2)] + 8(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)xy +$$

$$8(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)xz +$$

$$8(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)yz - 2r_{2,1}^2(k_2^2 + k_1^2) = 0,$$

(4.67)

que, como se ve, es una ecuación de segundo grado en z . Si ahora se sustituyen en (4.67) los valores de x, y, x^2, y^2 y xy dados en (4.61), (4.62) y (4.63) resulta que

$$r_{2,1}^4 + (k_2^2 - k_1^2)^2 + 4((x_1 - x_2)^2 - r_{2,1}^2) \times$$

$$\frac{1}{\det^2(A)}[n_2^2(p_1 - l_1)^2 + n_1^2(p_2 - l_2)^2 + (n_1 v_2 - n_2 v_1)^2 z^2 +$$

$$\begin{aligned}
& 2n_2(p_1 - l_1)(n_1v_2 - n_2v_1)z - \\
& 2n_2n_1(p_1 - l_1)(p_2 - l_2) - 2n_1(p_2 - l_2)(n_1v_2 - n_2v_1)z] + 4((y_1 - y_2)^2 - r_{2,1}^2) \times \\
& \frac{1}{\det^2(A)} [m_2^2(p_1 - l_1)^2 + m_1^2(p_2 - l_2)^2 + (m_2v_1 - m_1v_2)^2 z^2 - \\
& 2m_2(p_1 - l_1)(m_2v_1 - m_1v_2)z - \\
& 2m_2m_1(p_1 - l_1)(p_2 - l_2) + 2m_1(p_2 - l_2)(m_2v_1 - m_1v_2)z] + 4z^2((z_1 - z_2)^2 - r_{2,1}^2) + \\
& 4[(k_2^2 - k_1^2)(x_1 - x_2) + r_{2,1}^2(x_1 + x_2)] \times \\
& \frac{1}{\det(A)} [n_2(p_1 - l_1) - n_1(p_2 - l_2) + (n_1v_2 - n_2v_1)z] + \\
& 4[(k_2^2 - k_1^2)(y_1 - y_2) + r_{2,1}^2(y_1 + y_2)] \times \\
& \frac{1}{\det(A)} [-m_2(p_1 - l_1) + m_1(p_2 - l_2) + (m_2v_1 - m_1v_2)z] + \\
& 4[(k_2^2 - k_1^2)(z_1 - z_2) + r_{2,1}^2(z_1 + z_2)]z + 8(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \frac{1}{\det^2(A)} \times \\
& [-m_2n_2(p_1 - l_1)^2 + n_2m_1(p_1 - l_1)(p_2 - l_2) + \\
& n_2(p_1 - l_1)(m_2v_1 - m_1v_2)z + m_2n_1(p_1 - l_1)(p_2 - l_2) - m_1n_1(p_2 - l_2)^2 - \\
& n_1(p_2 - l_2)(m_2v_1 - m_1v_2)z - m_2(p_1 - l_1)(n_1v_2 - n_2v_1)z + \\
& m_1(p_2 - l_2)(n_1v_2 - n_2v_1)z + (n_1v_2 - n_2v_1)(m_2v_1 - m_1v_2)z^2] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8 (x_1 - x_2) (z_1 - z_2) \frac{1}{\det(A)} [n_2(p_1 - l_1) - n_1(p_2 - l_2) + (n_1 v_2 - n_2 v_1)z] z + \\
& 8 (y_1 - y_2) (z_1 - z_2) \frac{1}{\det(A)} [-m_2(p_1 - l_1) + m_1(p_2 - l_2) + (m_2 v_1 - m_1 v_2)z] z
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$-2r_{2,1}^2 (k_2^2 + k_1^2) = 0,$$

o, lo que es lo mismo,

$$[4 ((x_1 - x_2)^2 - r_{2,1}^2) (n_1 v_2 - n_2 v_1)^2 + 4 ((y_1 - y_2)^2 - r_{2,1}^2) (m_2 v_1 - m_1 v_2)^2 +$$

$$4 (\det(A))^2 ((z_1 - z_2)^2 - r_{2,1}^2) +$$

$$8 (x_1 - x_2) (y_1 - y_2) (n_1 v_2 - n_2 v_1) (m_2 v_1 - m_1 v_2) +$$

$$8 \det(A) (x_1 - x_2) (z_1 - z_2) (n_1 v_2 - n_2 v_1) +$$

$$8 (y_1 - y_2) (z_1 - z_2) \det(A) (m_2 v_1 - m_1 v_2)] z^2 +$$

$$[4 ((x_1 - x_2)^2 - r_{2,1}^2) (n_1 v_2 - n_2 v_1) [2n_2(p_1 - l_1) - 2n_1(p_2 - l_2)] +$$

$$4 ((y_1 - y_2)^2 - r_{2,1}^2) (m_2 v_1 - m_1 v_2) [-2m_2(p_1 - l_1) + 2m_1(p_2 - l_2)] +$$

$$4 [(k_2^2 - k_1^2) (x_1 - x_2) + r_{2,1}^2 (x_1 + x_2)] (\det A) (n_1 v_2 - n_2 v_1) +$$

$$4 [(k_2^2 - k_1^2) (y_1 - y_2) + r_{2,1}^2 (y_1 + y_2)] (\det A) (m_2 v_1 - m_1 v_2) +$$

$$4 [(k_2^2 - k_1^2) (z_1 - z_2) + r_{2,1}^2 (z_1 + z_2)] (\det A)^2 + 8 (x_1 - x_2) (y_1 - y_2) \times$$

$$\begin{aligned}
& [(m_2 v_1 - m_1 v_2)(n_2(p_1 - l_1) - n_1(p_2 - l_2)) + \\
& (-m_2(p_1 - l_1) + m_1(p_2 - l_2))(n_1 v_2 - n_2 v_1)] + 8(x_1 - x_2)(z_1 - z_2) \times \\
& (\det A)(n_2(p_1 - l_1) - n_1(p_2 - l_2)) + \\
& 8(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)(\det A)(-m_2(p_1 - l_1) + m_1(p_2 - l_2))]z + \\
& \left(r_{2,1}^4 + (k_2^2 - k_1^2)^2 \right) (\det A)^2 + \\
& 4 \left((x_1 - x_2)^2 - r_{2,1}^2 \right) (n_2(p_1 - l_1) - n_1(p_2 - l_2))^2 + \\
& 4 \left((y_1 - y_2)^2 - r_{2,1}^2 \right) (m_2(p_1 - l_1) - m_1(p_2 - l_2))^2 + \\
& 4[(k_2^2 - k_1^2)(x_1 - x_2) + r_{2,1}^2(x_1 + x_2)](\det A)(n_2(p_1 - l_1) - n_1(p_2 - l_2)) + \\
& 4[(k_2^2 - k_1^2)(y_1 - y_2) + r_{2,1}^2(y_1 + y_2)](\det A)(-m_2(p_1 - l_1) + m_1(p_2 - l_2)) + \\
& 8(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)[-m_2 n_2(p_1 - l_1)^2 + (n_2 m_1 + n_1 m_2)(p_1 - l_1)(p_2 - l_2) - m_1 n_1(p_2 - l_2)^2] - \\
& 2r_{2,1}^2(k_2^2 + k_1^2)(\det A)^2 = 0, \tag{4.69}
\end{aligned}$$

que tiene en general dos soluciones y, por consiguiente, da lugar nuevamente a dos localizaciones.

Naturalmente se podrían haber considerado a partir de (4.63), en vez de $r_{2,1}$, cualquiera de las otras diferencias de tiempos de llegada involucrados en el sistema inicial, que son $r_{3,2}$, $r_{3,1}$, $r_{4,3}$ y $r_{4,1}$, pero el resultado es el mismo y, por eso, no mostramos los cálculos.

4.2. Ecuaciones en la aproximación postnewtoniana (Relatividad General)

Las correcciones postnewtonianas para cada una de las localizaciones deducidas anteriormente se obtienen de la siguiente manera:

Llamamos, como siempre, p_{ij} a

$$p_{ij} = m \left\{ 2 \log \left[\frac{\left(tg \frac{\theta_{0i}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_j}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{0j}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_i}{2} \right)} \right] + (\cos \theta_{0i} - \cos \theta_{0j}) + (\cos \theta_j - \cos \theta_i) \right\} \quad (4.70)$$

y η_{ij} a

$$\eta_{ij} = -\frac{p_{ij}}{r_i - r_j}, \quad (r_i \neq r_j) \quad (4.71)$$

como en el Capítulo 3, de manera que, a partir de (4.53), resulta que (aquí hay que tener en cuenta también la observación final previa a la ecuación en (3.106))

$$\begin{aligned} r_{3,2} (1 + \eta_{32}) + r_{2,1} (1 + \eta_{21}) - r_{3,1} (1 + \eta_{31}) &= r_{3,2} \eta_{32} + r_{2,1} \eta_{21} - r_{3,1} \eta_{31}, \\ r_{4,3} (1 + \eta_{43}) + r_{3,1} (1 + \eta_{31}) - r_{4,1} (1 + \eta_{41}) &= r_{4,3} \eta_{43} + r_{3,1} \eta_{31} - r_{4,1} \eta_{41}, \\ r_{4,2} (1 + \eta_{42}) + r_{2,1} (1 + \eta_{21}) - r_{4,1} (1 + \eta_{41}) &= r_{4,2} \eta_{42} + r_{2,1} \eta_{21} - r_{4,1} \eta_{41}, \\ r_{4,3} (1 + \eta_{43}) + r_{3,2} (1 + \eta_{32}) - r_{4,2} (1 + \eta_{42}) &= r_{4,3} \eta_{43} + r_{3,2} \eta_{32} - r_{4,2} \eta_{42} \end{aligned} \quad (4.72)$$

y, de aquí, que

$$r_{3,2} (1 + \eta_{32}) r_{2,1} (1 + \eta_{21}) r_{3,1} (1 + \eta_{31}) = (r_3 - r_2)(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) \times$$

$$(1 + \eta_{32}) (1 + \eta_{21}) (1 + \eta_{31}) =$$

$$(r_{3,2} r_1^2 + r_{2,1} r_3^2 - r_{3,1} r_2^2) (1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}),$$

$$r_{4,3} (1 + \eta_{43}) r_{3,1} (1 + \eta_{31}) r_{4,1} (1 + \eta_{41}) = (r_4 - r_3)(r_3 - r_1)(r_4 - r_1) \times$$

$$(1 + \eta_{43}) (1 + \eta_{31}) (1 + \eta_{41}) =$$

$$(r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}),$$

$$r_{4,2}(1 + \eta_{42})r_{2,1}(1 + \eta_{21})r_{4,1}(1 + \eta_{41}) = (r_4 - r_2)(r_2 - r_1)(r_4 - r_1) \times$$

$$(1 + \eta_{42})(1 + \eta_{21})(1 + \eta_{41}) =$$

$$(r_{4,2}r_1^2 + r_{2,1}r_4^2 - r_{4,1}r_2^2)(1 + \eta_{42} + \eta_{21} + \eta_{41}),$$

$$r_{4,3}(1 + \eta_{43})r_{3,2}(1 + \eta_{32})r_{4,2}(1 + \eta_{42}) = (r_4 - r_3)(r_3 - r_2)(r_4 - r_2) \times$$

$$(1 + \eta_{43})(1 + \eta_{32})(1 + \eta_{42}) =$$

$$(r_{4,3}r_2^2 + r_{3,2}r_4^2 - r_{4,2}r_3^2)(1 + \eta_{43} + \eta_{32} + \eta_{42}), \quad (4.73)$$

donde hemos supuesto que $(1 + \eta_{32})(1 + \eta_{21})(1 + \eta_{31}) = (1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31})$.

Así que, operando la primera expresión resulta que

$$r_{3,2}(1 + \eta_{32})r_{2,1}(1 + \eta_{21})r_{3,1}(1 + \eta_{31}) =$$

$$(r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_4^2 - r_{3,1}r_3^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) =$$

$$[r_{3,2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + r_{2,1}(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) - r_{3,1}(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) +$$

$$(-2)(r_{3,2}x_1 + r_{2,1}x_3 - r_{3,1}x_2)x + (-2)(r_{3,2}y_1 + r_{2,1}y_3 - r_{3,1}y_2)y +$$

$$(-2)(r_{3,2}z_1 + r_{2,1}z_3 - r_{3,1}z_2)z + (r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1})(x^2 + y^2 + z^2)] \times$$

$$(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) =$$

$$(r_{3,2}K_1 + r_{2,1}K_3 - r_{3,1}K_2 + m_1x + n_1y + v_1z)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) +$$

$$(r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1})(x^2 + y^2 + z^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31});$$

y, como $r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1} = 0$, entonces se tiene que

$$r_{3,2}(1 + \eta_{32})r_{2,1}(1 + \eta_{21})r_{3,1}(1 + \eta_{31}) = (l_1 + m_1x + n_1y + v_1z) \times$$

$$(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31})$$

con resultados análogos para las restantes expresiones. Por lo tanto, ahora el sistema lineal es

$$\begin{aligned} r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= (l_{11} + m_{11}x + n_{11}y + v_{11}z), \\ r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} &= (l_{21} + m_{21}x + n_{21}y + v_{21}z), \\ r_{4,2}r_{2,1}r_{4,1} &= (l_{31} + m_{31}x + n_{31}y + v_{31}z), \\ r_{4,3}r_{3,2}r_{4,2} &= (l_{41} + m_{41}x + n_{41}y + v_{41}z), \end{aligned} \tag{4.74}$$

donde

$$\begin{aligned} l_{11} &= (r_{3,2}K_1 + r_{2,1}K_3 - r_{3,1}K_2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\ l_{21} &= (r_{4,3}K_1 + r_{3,1}K_4 - r_{4,1}K_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\ l_{31} &= (r_{4,2}K_1 + r_{2,1}K_4 - r_{4,1}K_2)(1 + \eta_{42} + \eta_{21} + \eta_{41}), \\ l_{41} &= (r_{4,3}K_2 + r_{3,2}K_4 - r_{4,2}K_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{32} + \eta_{42}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= (-2)(r_{3,2}x_1 + r_{2,1}x_3 - r_{3,1}x_2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\ m_{21} &= (-2)(r_{4,3}x_1 + r_{3,1}x_4 - r_{4,1}x_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\ m_{31} &= (-2)(r_{4,2}x_1 + r_{2,1}x_4 - r_{4,1}x_2)(1 + \eta_{42} + \eta_{21} + \eta_{41}), \\ m_{41} &= (-2)(r_{4,3}x_2 + r_{3,2}x_4 - r_{4,2}x_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{32} + \eta_{42}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{11} &= (-2)(r_{3,2}y_1 + r_{2,1}y_3 - r_{3,1}y_2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\ n_{21} &= (-2)(r_{4,3}y_1 + r_{3,1}y_4 - r_{4,1}y_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\ n_{31} &= (-2)(r_{4,2}y_1 + r_{2,1}y_4 - r_{4,1}y_2)(1 + \eta_{42} + \eta_{21} + \eta_{41}), \\ n_{41} &= (-2)(r_{4,3}y_2 + r_{3,2}y_4 - r_{4,2}y_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{32} + \eta_{42}); \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v_{11} &= (-2)(r_{3,2}z_1 + r_{2,1}z_3 - r_{3,1}z_2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\ v_{21} &= (-2)(r_{4,3}z_1 + r_{3,1}z_4 - r_{4,1}z_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\ v_{31} &= (-2)(r_{4,2}z_1 + r_{2,1}z_4 - r_{4,1}z_2)(1 + \eta_{42} + \eta_{21} + \eta_{41}), \\ v_{41} &= (-2)(r_{4,3}z_2 + r_{3,2}z_4 - r_{4,2}z_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{32} + \eta_{42}), \end{aligned}$$

y donde nuevamente se puede comprobar que las dos últimas ecuaciones dependen linealmente de las dos primeras. Por lo tanto, escribiendo

$$\overline{p_1} = r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}$$

y

$$\overline{p_2} = r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1},$$

resulta que el sistema lineal a considerar es

$$\begin{aligned} \overline{p_1} &= l_{11} + m_{11}x + n_{11}y + v_{11}z \\ \overline{p_2} &= l_{21} + m_{21}x + n_{21}y + v_{21}z, \end{aligned} \tag{4.75}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} m_{11} & n_{11} \\ m_{21} & n_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{p_1} - l_{11} - v_{11}z \\ \overline{p_2} - l_{21} - v_{21}z \end{pmatrix}, \tag{4.76}$$

cuya solución es

$$x = \frac{1}{\det B} [n_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) - n_{11}(\overline{p_2} - l_{21}) + (n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})z],$$

$$y = \frac{1}{\det B} [-m_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) + m_{11}(\overline{p_2} - l_{21}) + (m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})z],$$

donde B es la matriz de los coeficientes del sistema.

Ahora tenemos que

$$x^2 = \frac{1}{\det^2 B} [n_{21}^2(\overline{p_1} - l_{11})^2 + n_{11}^2(\overline{p_2} - l_{21})^2 + (n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})^2 z^2 -$$

$$2n_{21}(\overline{p_1} - l_{11})n_{11}(\overline{p_2} - l_{21}) +$$

$$2n_{21}(\overline{p_1} - l_{11})(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})z - 2n_{11}(\overline{p_2} - l_{21})(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})z],$$

$$y^2 = \frac{1}{\det^2 B} [m_{21}^2(\overline{p_1} - l_{11})^2 + m_{11}^2(\overline{p_2} - l_{21})^2 + (m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})^2 z^2 -$$

$$2m_{21}(\overline{p_1} - l_{11})m_{11}(\overline{p_2} - l_{21}) -$$

$$2m_{21}(\overline{p_1} - l_{11})(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})z + 2m_{11}(\overline{p_2} - l_{21})(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})z]$$

y

$$xy = \frac{1}{\det^2 B} [-n_{21}(\overline{p_1} - l_{11})^2 m_{21} + n_{21}(\overline{p_1} - l_{11})m_{11}(\overline{p_2} - l_{21}) +$$

$$n_{21}(\overline{p_1} - l_{11})(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})z + n_{11}(\overline{p_2} - l_{21})m_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) -$$

$$n_{11}(\overline{p_2} - l_{21})^2 m_{11} - n_{11}(\overline{p_2} - l_{21})(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})z -$$

$$m_{21}(\overline{p_1} - l_{11})(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})z + m_{11}(\overline{p_2} - l_{21})(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})z +$$

$$(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})z^2.$$

Así que tenemos, en este caso, que la ecuación para z es

$$r_{2,1}^4 + (k_2^2 - k_1^2)^2 +$$

$$4((x_1 - x_2)^2 - r_{2,1}^2) \frac{1}{\det^2 B} [n_{21}^2(\overline{p_1} - l_{11})^2 + n_{11}^2(\overline{p_2} - l_{21})^2 + (n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})^2 z^2 -$$

$$+ 2n_{21}(\overline{p_1} - l_{11})n_{11}(\overline{p_2} - l_{21}) +$$

$$2n_{21}(\overline{p_1} - l_{11})(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})z - 2n_{11}(\overline{p_2} - l_{21})(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})z]$$

$$\begin{aligned}
& +4 \left((y_1 - y_2)^2 - r_{2,1}^2 \right) \frac{1}{\det^2 B} [m_{21}^2 (\overline{p_1} - l_{11})^2 + m_{11}^2 (\overline{p_2} - l_{21})^2 + (m_{21} v_{11} - m_{11} v_{21})^2 z^2 - \\
& \quad 2m_{21} (\overline{p_1} - l_{11}) m_{11} (\overline{p_2} - l_{21}) - \\
& \quad 2m_{21} (\overline{p_1} - l_{11}) (m_{21} v_{11} - m_{11} v_{21}) z + 2m_{11} (\overline{p_2} - l_{21}) (m_{21} v_{11} - m_{11} v_{21}) z] \\
& \quad + 4z^2 \left((z_1 - z_2)^2 - r_{2,1}^2 \right) + \\
& \quad 4[(k_2^2 - k_1^2) (x_1 - x_2) + r_{2,1}^2 (x_1 + x_2)] \times \\
& \quad \frac{1}{\det B} [n_{21} (\overline{p_1} - l_{11}) - n_{11} (\overline{p_2} - l_{21}) + (n_{11} v_{21} - n_{21} v_{11}) z] \\
& \quad + 4[(k_2^2 - k_1^2) (y_1 - y_2) + r_{2,1}^2 (y_1 + y_2)] \times \\
& \quad \frac{1}{\det B} [-m_{21} (\overline{p_1} - l_{11}) + m_{11} (\overline{p_2} - l_{21}) + (m_{21} v_{11} - m_{11} v_{21}) z] + \\
& \quad 4z[(k_2^2 - k_1^2) (z_1 - z_2) + r_{2,1}^2 (z_1 + z_2)] + \\
& \quad 8(x_1 - x_2) (y_1 - y_2) \left[\frac{1}{\det^2 B} [-m_{21} (\overline{p_1} - l_{11})^2 n_{21} + n_{21} (\overline{p_1} - l_{11}) m_{11} (\overline{p_2} - l_{21}) + \right. \\
& \quad \left. n_{21} (\overline{p_1} - l_{11}) (m_{21} v_{11} - m_{11} v_{21}) z + n_{11} (\overline{p_2} - l_{21}) m_{21} (\overline{p_1} - l_{11}) - \right. \\
& \quad \left. n_{11} (\overline{p_2} - l_{21})^2 m_{11} - n_{11} (\overline{p_2} - l_{21}) (m_{21} v_{11} - m_{11} v_{21}) z - \right. \\
& \quad \left. m_{21} (\overline{p_1} - l_{11}) (n_{11} v_{21} - n_{21} v_{11}) z + m_{11} (\overline{p_2} - l_{21}) (n_{11} v_{21} - n_{21} v_{11}) z + \right.
\end{aligned}$$

$$(n_{11}v_{11} - m_{11}v_{21})(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})z^2]$$

$$8(x_1 - x_2)(z_1 - z_2) \frac{1}{\det B} [n_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) - n_{11}(\overline{p_2} - l_{21}) + (n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})z]z +$$

$$8(y_1 - y_2)(z_1 - z_2) \frac{1}{\det B} [-m_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) + m_{11}(\overline{p_2} - l_{21}) + (m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})z]z$$

$$-2r_{2,1}^2(k_2^2 + k_1^2) = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$[4((x_1 - x_2)^2 - r_{2,1}^2)(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})^2 + 4((y_1 - y_2)^2 - r_{2,1}^2)(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})^2 +$$

$$4(\det B)^2((z_1 - z_2)^2 - r_{2,1}^2) +$$

$$8(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11}) +$$

$$8(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)(\det B)(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11}) +$$

$$8(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)(\det B)(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})]z^2 +$$

$$[4((x_1 - x_2)^2 - r_{2,1}^2)(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})(2n_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) - 2n_{11}(\overline{p_2} - l_{21})) +$$

$$4((y_1 - y_2)^2 - r_{2,1}^2)(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})(-2m_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) + 2m_{11}(\overline{p_2} - l_{21})) +$$

$$4[(k_2^2 - k_1^2)(x_1 - x_2) + r_{2,1}^2(x_1 + x_2)](\det B)(n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11}) +$$

$$4[(k_2^2 - k_1^2)(y_1 - y_2) + r_{2,1}^2(y_1 + y_2)](\det B)(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21}) +$$

$$4[(k_2^2 - k_1^2)(z_1 - z_2) + r_{2,1}^2(z_1 + z_2)](\det B)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& 8(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)[(m_{21}v_{11} - m_{11}v_{21})(n_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) - n_{11}(\overline{p_2} - l_{21})) + \\
& (n_{11}v_{21} - n_{21}v_{11})(-m_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) + m_{11}(\overline{p_2} - l_{21}))] + \\
& 8(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)(\det B)(n_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) - n_{11}(\overline{p_2} - l_{21})) + \\
& 8(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)(\det B)(-m_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) + m_{11}(\overline{p_2} - l_{21}))]z + \\
& (r_{2,1}^4 + (k_2^2 - k_1^2)^2)^2 \det B + 4((x_1 - x_2)^2 - r_{2,1}^2)(n_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) - n_{11}(\overline{p_2} - l_{21}))^2 + \\
& 4((y_1 - y_2)^2 - r_{2,1}^2)(m_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) - m_{11}(\overline{p_2} - l_{21}))^2 + \\
& 4[(k_2^2 - k_1^2)(x_1 - x_2) + r_{2,1}^2(x_1 + x_2)](\det B)(n_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) - n_{11}(\overline{p_2} - l_{21})) + \\
& 4[(k_2^2 - k_1^2)(y_1 - y_2) + r_{2,1}^2(y_1 + y_2)](\det B)(-m_{21}(\overline{p_1} - l_{11}) + m_{11}(\overline{p_2} - l_{21})) + \\
& 8(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)[-m_{21}(\overline{p_1} - l_{11})^2 n_{21} + (n_{21}m_{11} + n_{11}m_{21})(\overline{p_1} - l_{11})(\overline{p_2} - l_{21}) - \\
& n_{11}(\overline{p_2} - l_{21})^2 m_{11}] - 2r_{2,1}^2(k_2^2 + k_1^2)(\det B)^2 = 0 \tag{4.77}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, después de resolver esta ecuación en z se pueden llevar las soluciones a las expresiones de x, y mostradas anteriormente y tener, así, por último, las dos ternas como soluciones, esto es, (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) .

4.3. Resumen

Para poder aplicar el método desarrollado en el Capítulo 3 se tiene que suponer que el radiotransmisor está sobre la superficie de la Tierra. En este caso, si se utilizan tres satélites geoestacionarios entonces se tiene la ventaja de que no se necesitan satélites específicos pero, al mismo tiempo, tenemos la desventaja de que se obtienen, en el mejor de los casos, dos localizaciones. También se pueden utilizar tres satélites ecuatoriales, con los que se tiene la ventaja de que no hay necesidad de tener en cuenta circunstancias específicas de los satélites geoestacionarios, aunque el número de localizaciones sigue siendo dos en general, y no tiene por qué haber disponibilidad de este tipo de satélites. También se pueden utilizar cuatro satélites geoestacionarios, con lo cual tenemos la ventaja de que no se necesitan satélites específicos, además de poder disponer de un número mayor de mediciones, pero se tiene el inconveniente de que se deducen, en general, dos localizaciones; y, finalmente, si se utilizan cuatro satélites ecuatoriales, entonces tenemos las mismas ventajas que en la segunda opción y, además, se puede obtener un número mayor de mediciones; pero, nuevamente, el inconveniente es que se obtienen, en general, dos localizaciones.

Ahora bien, si el radiotransmisor no está sobre la superficie de la Tierra entonces se puede aplicar el método acabado de ver en este Capítulo con cuatro satélites no ecuatoriales, aunque se tiene la desventaja de que también se obtienen, en general, dos localizaciones. Y naturalmente, en este caso disponemos, igual que para el método descrito en el Capítulo 3, de las siguientes relaciones, que proporcionan para cada satélite S_i ($i = 1, 2, 3$ o $i = 1, 2, 3, 4$, según el caso) (1º) el instante, $t_{pn_i}^j$, correspondiente a cada localización, T^j ($j = 1, 2$); (2º) las diferencias entre los tiempos de emisión previstos para cada localización de acuerdo con el modelo postnewtoniano, $t_{pn_i}^j$ y (3º) los instantes de emisión previstos de acuerdo con el modelo newtoniano, t_{cl}^j , junto con los correspondientes retrasos temporales, $(t_{S_i} - t_{pn_i}^j) - (t_{S_i} - t_{cl}^j)$. Estas relaciones son:

$$t_{pn_i}^j = t_{S_i} - r_i^j - m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_i^j}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_i^j}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_i^j} - \cos \theta_{S_i^j} \right], \quad (4.78)$$

$$t_{pn_i}^j = t_{S_i} - r_i^j - 2m \log \frac{r_{S_i^j}}{r_{T_i^j}}, \quad (4.79)$$

$$t_{pn_i}^j = t_{cl}^j - m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_i^j}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_i^j}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_i^j} - \cos \theta_{S_i^j} \right], \quad (4.80)$$

$$t_{pn_i}^j = t_{cl}^j - 2m \log \frac{r_{S_i^j}}{r_{T^j}}, \quad (4.81)$$

$$(t_{S_i} - t_{pn_i}^j) - (t_{S_i} - t_{cl}^j) = m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_i^j}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_i^j}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_i^j} - \cos \theta_{S_i^j} \right], \quad (4.82)$$

$$(t_{S_i} - t_{pn_i}^j) - (t_{S_i} - t_{cl}^j) = 2m \log \frac{r_{S_i^j}}{r_{T^j}}, \quad (4.83)$$

de acuerdo con cada una de las circunstancias descritas en el Capítulo 3.

Capítulo 5

Ecuaciones de Geolocalización por TDOA para cinco satélites arbitrarios

5.1. Ecuaciones en la aproximación newtoniana (Relatividad Especial)

De acuerdo con el resumen del capítulo anterior podemos concluir que el problema de la Geolocalización por TDOA no queda completamente resuelto con los dos métodos descritos anteriormente, incluso utilizando cuatro satélites. Pues bien, en este capítulo mostramos que este problema se puede resolver para obtener una única localización generalizando el método descrito en el capítulo anterior mediante un sistema de ecuaciones similares al dado en (4.74) que involucre a cinco satélites. Así, lo primero que se observa al introducir un quinto satélite es que se dispone de seis posibilidades para añadir una ecuación al sistema inicial (4.74) sobre la base de las relaciones fundamentales que se satisfacen en este método y que, para esta generalización, son:

$$r_{i,k} + r_{k,j} - r_{i,j} = 0, \quad r_{i+1,i} = r_{i+1} - r_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (5.1)$$

De esta forma tenemos que los posibles nuevos sistemas de cinco ecuaciones pueden estar formados por las cuatro primeras ecuaciones del conjunto que se muestra a

continuación, junto con una de las seis restantes. Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1} &= 0, \\
r_{4,3} + r_{3,1} - r_{4,1} &= 0, \\
r_{4,2} + r_{2,1} - r_{4,1} &= 0, \\
r_{4,3} + r_{3,2} - r_{4,2} &= 0, \\
r_{5,4} + r_{4,1} - r_{5,1} &= 0, \\
r_{5,3} + r_{3,1} - r_{5,1} &= 0, \\
r_{5,2} + r_{2,1} - r_{5,1} &= 0, \\
r_{5,4} + r_{4,2} - r_{5,2} &= 0, \\
r_{5,4} + r_{4,3} - r_{5,3} &= 0, \\
r_{5,3} + r_{3,2} - r_{5,2} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

con lo que, de manera análoga a como se desarrolla el método anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= (r_3 - r_2)(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) = r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2, \\
r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} &= (r_4 - r_2)(r_3 - r_1)(r_4 - r_1) = r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2, \\
r_{4,2}r_{2,1}r_{4,1} &= (r_4 - r_2)(r_2 - r_1)(r_4 - r_1) = r_{4,2}r_1^2 + r_{2,1}r_4^2 - r_{4,1}r_2^2, \\
r_{4,3}r_{3,2}r_{4,2} &= (r_4 - r_3)(r_3 - r_2)(r_4 - r_2) = r_{4,3}r_2^2 + r_{3,2}r_4^2 - r_{4,2}r_3^2, \\
r_{4,3}r_{3,2}r_{4,2} &= (r_4 - r_3)(r_3 - r_2)(r_4 - r_2) = r_{4,3}r_2^2 + r_{3,2}r_4^2 - r_{4,2}r_3^2, \\
r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} &= (r_5 - r_4)(r_4 - r_1)(r_5 - r_1) = r_{5,4}r_1^2 + r_{4,1}r_5^2 - r_{5,1}r_4^2, \\
r_{5,3}r_{3,1}r_{5,1} &= (r_5 - r_3)(r_3 - r_1)(r_5 - r_1) = r_{5,3}r_1^2 + r_{3,1}r_5^2 - r_{5,1}r_3^2, \\
r_{5,2}r_{2,1}r_{5,1} &= (r_5 - r_2)(r_2 - r_1)(r_5 - r_1) = r_{5,2}r_1^2 + r_{2,1}r_5^2 - r_{5,1}r_2^2, \\
r_{5,4}r_{4,2}r_{5,2} &= (r_5 - r_4)(r_4 - r_2)(r_5 - r_2) = r_{5,4}r_2^2 + r_{4,2}r_5^2 - r_{5,2}r_4^2, \\
r_{5,4}r_{4,3}r_{5,3} &= (r_5 - r_4)(r_4 - r_3)(r_5 - r_3) = r_{5,4}r_3^2 + r_{4,3}r_5^2 - r_{5,3}r_4^2, \\
r_{5,3}r_{3,2}r_{5,2} &= (r_5 - r_3)(r_3 - r_2)(r_5 - r_2) = r_{5,3}r_2^2 + r_{3,2}r_5^2 - r_{5,2}r_3^2.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Así que, si se sustituye r_i^2 por $(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$ ($i = 1, 2, 3, 4$) y K_i por $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, resultan las siguientes ecuaciones:

- 1) $r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} = l_1 + m_1x + n_1y + v_1z,$
- 2) $r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} = l_2 + m_2x + n_2y + v_2z,$
- 3) $r_{4,2}r_{2,1}r_{4,1} = l_3 + m_3x + n_3y + v_3z,$
- 4) $r_{4,3}r_{3,2}r_{4,2} = l_4 + m_4x + n_4y + v_4z,$

$$\begin{aligned}
5) \quad & r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} = l_5 + m_5x + n_5y + v_5z, \\
6) \quad & r_{5,3}r_{3,1}r_{5,1} = l_6 + m_6x + n_6y + v_6z, \\
7) \quad & r_{5,2}r_{2,1}r_{5,1} = l_7 + m_7x + n_7y + v_7z, \\
8) \quad & r_{5,4}r_{4,2}r_{5,2} = l_8 + m_8x + n_8y + v_8z, \\
9) \quad & r_{5,4}r_{4,3}r_{5,3} = l_9 + m_9x + n_9y + v_9z, \\
10) \quad & r_{5,3}r_{3,2}r_{5,2} = l_{10} + m_{10}x + n_{10}y + v_{10}z,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
l_1 &= r_{3,2}K_1 + r_{2,1}K_3 - r_{3,1}K_2, \\
l_2 &= r_{4,3}K_1 + r_{3,1}K_4 - r_{4,1}K_3, \\
l_3 &= r_{4,2}K_1 + r_{2,1}K_4 - r_{4,1}K_2, \\
l_4 &= r_{4,3}K_2 + r_{3,2}K_4 - r_{4,2}K_3, \\
l_5 &= r_{5,4}K_1 + r_{4,1}K_5 - r_{5,1}K_4, \\
l_6 &= r_{5,3}K_1 + r_{3,1}K_5 - r_{5,1}K_3, \\
l_7 &= r_{5,2}K_1 + r_{2,1}K_5 - r_{5,1}K_2, \\
l_8 &= r_{5,4}K_2 + r_{4,2}K_5 - r_{5,2}K_4, \\
l_9 &= r_{5,4}K_3 + r_{4,3}K_5 - r_{5,3}K_4, \\
l_{10} &= r_{5,3}K_2 + r_{3,2}K_5 - r_{5,2}K_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= (-2)(r_{3,2}x_1 + r_{2,1}x_3 - r_{3,1}x_2), \\
m_2 &= (-2)(r_{4,3}x_1 + r_{3,1}x_4 - r_{4,1}x_3), \\
m_3 &= (-2)(r_{4,2}x_1 + r_{2,1}x_4 - r_{4,1}x_2), \\
m_4 &= (-2)(r_{4,3}x_2 + r_{3,2}x_4 - r_{4,2}x_3), \\
m_5 &= (-2)(r_{5,4}x_1 + r_{4,1}x_5 - r_{5,1}x_4), \\
m_6 &= (-2)(r_{5,3}x_1 + r_{3,1}x_5 - r_{5,1}x_3), \\
m_7 &= (-2)(r_{5,2}x_1 + r_{2,1}x_5 - r_{5,1}x_2), \\
m_8 &= (-2)(r_{5,4}x_2 + r_{4,2}x_5 - r_{5,2}x_4), \\
m_9 &= (-2)(r_{5,4}x_3 + r_{4,3}x_5 - r_{5,3}x_4), \\
m_{10} &= (-2)(r_{5,3}x_2 + r_{3,2}x_5 - r_{5,2}x_3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_1 &= (-2)(r_{3,2}y_1 + r_{2,1}y_3 - r_{3,1}y_2), \\
n_2 &= (-2)(r_{4,3}y_1 + r_{3,1}y_4 - r_{4,1}y_3), \\
n_3 &= (-2)(r_{4,2}y_1 + r_{2,1}y_4 - r_{4,1}y_2), \\
n_4 &= (-2)(r_{4,3}y_2 + r_{3,2}y_4 - r_{4,2}y_3), \\
n_5 &= (-2)(r_{5,4}y_1 + r_{4,1}y_5 - r_{5,1}y_4), \\
n_6 &= (-2)(r_{5,3}y_1 + r_{3,1}y_5 - r_{5,1}y_3), \\
n_7 &= (-2)(r_{5,2}y_1 + r_{2,1}y_5 - r_{5,1}y_2), \\
n_8 &= (-2)(r_{5,4}y_2 + r_{4,2}y_5 - r_{5,2}y_4), \\
n_9 &= (-2)(r_{5,4}y_3 + r_{4,3}y_5 - r_{5,3}y_4), \\
n_{10} &= (-2)(r_{5,3}y_2 + r_{3,2}y_5 - r_{5,2}y_3);
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
v_1 &= (-2)(r_{3,2}z_1 + r_{2,1}z_3 - r_{3,1}z_2), \\
v_2 &= (-2)(r_{4,3}z_1 + r_{3,1}z_4 - r_{4,1}z_3), \\
v_3 &= (-2)(r_{4,2}z_1 + r_{2,1}z_4 - r_{4,1}z_2), \\
v_4 &= (-2)(r_{4,3}z_2 + r_{3,2}z_4 - r_{4,2}z_3), \\
v_5 &= (-2)(r_{5,4}z_1 + r_{4,1}z_5 - r_{5,1}z_4), \\
v_6 &= (-2)(r_{5,3}z_1 + r_{3,1}z_5 - r_{5,1}z_3), \\
v_7 &= (-2)(r_{5,2}z_1 + r_{2,1}z_5 - r_{5,1}z_2), \\
v_8 &= (-2)(r_{5,4}z_2 + r_{4,2}z_5 - r_{5,2}z_4), \\
v_9 &= (-2)(r_{5,4}z_3 + r_{4,3}z_5 - r_{5,3}z_4), \\
v_{10} &= (-2)(r_{5,3}z_2 + r_{3,2}z_5 - r_{5,2}z_3),
\end{aligned} \tag{5.5}$$

y se puede observar que para obtener estos resultados no se ha necesitado hasta ahora ninguna restricción sobre la naturaleza de los cinco satélites (no obstante, véase el final del párrafo siguiente).

Por otro lado, ya sabemos que, por lo visto en el capítulo anterior, de las cuatro primeras ecuaciones sólo las dos primeras son independientes. Por lo tanto, el problema para encontrar una solución única consiste en buscar entre las otras seis ecuaciones, aquella (o aquellas) que junto con éstas dos primeras formen un sistema de tres ecuaciones independientes.

5.1.1. Independencia de las ecuaciones y soluciones únicas

Pues bien, antes de estudiar la independencia de los posibles nuevos sistemas de tres ecuaciones vamos a dar de nuevo una demostración alternativa del hecho de que de las cuatro primeras ecuaciones sólo dos son independientes utilizando un método estandar, que es el que usaremos después para estudiar la dependencia entre las restantes seis ecuaciones junto con las dos primeras.

Así que, tenemos:

a) Para las ecuaciones 1, 2 y 3 en (5.4) buscamos las posibles soluciones de a y b de la siguiente ecuación

$$a(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}) + b(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}) = r_{4,2}r_{2,1}r_{4,1}$$

o, lo que es lo mismo, de la ecuación

$$a(r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2) + b(r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2) = r_{4,2}r_1^2 + r_{2,1}r_4^2 - r_{4,1}r_2^2.$$

Para ello, identificamos los coeficientes y tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} r_{3,2} & r_{4,3} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} \\ -r_{3,1} & 0 \\ 0 & r_{3,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{4,2} \\ 0 \\ -r_{4,1} \\ r_{2,1} \end{pmatrix},$$

lo que da lugar, para encontrar las soluciones, al estudio de los rangos de la matriz de los coeficientes, A , y de la matriz ampliada, que representamos en la forma

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & r_{4,2} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} & 0 \\ -r_{3,1} & 0 & -r_{4,1} \\ 0 & r_{3,1} & r_{2,1} \end{array} \right).$$

Pues bien, por eliminación Gaussiana la matriz escalonada correspondiente es

$$\left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & r_{4,2} \\ 0 & r_{3,1} & r_{2,1} \\ 0 & 0 & -\frac{r_{2,1}r_{4,3}-r_{3,1}r_{4,2}+r_{3,2}r_{4,1}}{r_{3,2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

y como $-\frac{r_{2,1}r_{4,3}-r_{3,1}r_{4,2}+r_{3,2}r_{4,1}}{r_{3,2}} = 0$, resulta que $rg(A) = rg(A^*)$ siempre que $r_{3,2} \neq 0$ y $r_{3,1} \neq 0$, o que $r_{3,2} \neq 0$, $r_{3,1} = 0$ y $r_{2,1} = 0$ simultáneamente. En estos casos las

ecuaciones 1, 2, 3 son dependientes. Y como, por otro lado, $rg(A) < rg(A^*)$ cuando $r_{3,2} \neq 0$, $r_{3,1} = 0$ y $r_{2,1} \neq 0$, es en este caso cuando las ecuaciones 1, 2, 3 en (5.4) son independientes.

b) Análogamente, para las ecuaciones 1, 2 y 4 tenemos la siguiente ecuación

$$a(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}) + b(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}) = r_{4,3}r_{3,2}r_{4,2}$$

o, lo que es lo mismo,

$$a(r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2) + b(r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2) = r_{4,3}r_2^2 + r_{3,2}r_4^2 - r_{4,2}r_3^2.$$

Entonces, identificando nuevamente coeficientes tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} r_{3,2} & r_{4,3} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} \\ -r_{3,1} & 0 \\ 0 & r_{3,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r_{4,2} \\ r_{4,3} \\ r_{3,2} \end{pmatrix},$$

lo que da lugar al estudio de los rangos de la matriz de los coeficientes, A , y de la matriz ampliada que, igualmente, representamos en la forma

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & 0 \\ r_{2,1} & -r_{4,1} & -r_{4,2} \\ -r_{3,1} & 0 & r_{4,3} \\ 0 & r_{3,1} & r_{3,2} \end{array} \right).$$

Pues bien, por eliminación Gaussiana ahora la matriz escalonada correspondiente es

$$\left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & 0 \\ 0 & r_{3,1} & r_{3,2} \\ 0 & 0 & \frac{r_{2,1}r_{4,3} - r_{3,1}r_{4,2} + r_{3,2}r_{4,1}}{r_{3,1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

y como $\frac{r_{2,1}r_{4,3} - r_{3,1}r_{4,2} + r_{3,2}r_{4,1}}{r_{3,1}} = 0$ resulta que $rg(A) = rg(A^*)$ siempre que $r_{3,2} \neq 0$ y $r_{3,1} \neq 0$, o que $r_{3,2} \neq 0$, $r_{3,1} = 0$ y $r_{2,1} = 0$ simultáneamente. En este caso las ecuaciones 1, 2, 4 son dependientes. Y como, por otro lado, $rg(A) < rg(A^*)$ cuando $r_{3,2} \neq 0$, $r_{3,1} = 0$ y $r_{2,1} \neq 0$ es en este caso cuando las ecuaciones 1, 2, 4 en (5.4) son independientes.

c) Pasamos a estudiar las ecuaciones 1, 2 y 5. Ahora tenemos como ecuación

$$a(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}) + b(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}) = r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$a(r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2) + b(r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2) = r_{5,4}r_1^2 + r_{4,1}r_5^2 - r_{5,1}r_4^2.$$

Entonces, el sistema ahora es

$$\begin{pmatrix} r_{3,2} & r_{4,3} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} \\ -r_{3,1} & 0 \\ 0 & r_{3,1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{5,4} \\ 0 \\ 0 \\ -r_{5,1} \\ r_{4,1} \end{pmatrix},$$

lo que da lugar al estudio de los rangos de la matriz A y de la matriz ampliada

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & r_{5,4} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} & 0 \\ -r_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{3,1} & -r_{5,1} \\ 0 & 0 & r_{4,1} \end{array} \right)$$

de la que, por eliminación Gaussiana, se tiene la siguiente forma escalonada

$$\left(\begin{array}{cc|c} -r_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & -r_{4,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{5,4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Y aquí vemos que la situación es la siguiente: si $r_{5,4} = 0$ entonces $rg(A) = rg(A^*)$ siempre y, por tanto, en ese caso las ecuaciones 1, 2 y 5 son linealmente dependientes. Pero si $r_{5,4} \neq 0$ entonces $rg(A) < rg(A^*)$ siempre y en esta circunstancia las ecuaciones 1, 2 y 5 son linealmente independientes.

d) Para las ecuaciones 1, 2 y 6 estudiamos la siguiente ecuación

$$a(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}) + b(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}) = r_{5,3}r_{3,1}r_{5,1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$a(r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2) + b(r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2) = r_{5,3}r_1^2 + r_{3,1}r_5^2 - r_{5,1}r_3^2.$$

Así que, identificando coeficientes tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} r_{3,2} & r_{4,3} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} \\ -r_{3,1} & 0 \\ 0 & r_{3,1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{5,3} \\ -r_{5,1} \\ 0 \\ 0 \\ r_{3,1} \end{pmatrix},$$

lo que da lugar al estudio de los rangos de la matriz de los coeficientes, A , y de la matriz ampliada, que representamos en la forma

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & r_{5,3} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} & -r_{5,1} \\ -r_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & -r_{5,1} \end{array} \right),$$

de manera que, por eliminación Gaussiana, se tiene la siguiente forma escalonada

$$\left(\begin{array}{cc|c} -r_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{5,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Y aquí la situación es la siguiente: si $r_{5,3} = 0$ entonces $rg(A) = rg(A^*)$ siempre, y si $r_{5,3} \neq 0$ entonces $rg(A) < rg(A^*)$ y en esta circunstancia las ecuaciones 1, 2 y 6 son linealmente independientes.

e) Para las ecuaciones 1, 2 y 7 tenemos la siguiente ecuación

$$a(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}) + b(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}) = r_{5,2}r_{2,1}r_{5,1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$a(r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2) + b(r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2) = r_{5,2}r_1^2 + r_{2,1}r_5^2 - r_{5,1}r_2^2$$

Entonces el nuevo sistema es

$$\left(\begin{array}{cc} r_{3,2} & r_{4,3} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} \\ -r_{3,1} & 0 \\ 0 & r_{3,1} \\ 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{5,2} \\ 0 \\ -r_{5,1} \\ 0 \\ r_{2,1} \end{pmatrix}$$

lo que da lugar al estudio de los rangos de la matriz de los coeficientes, A , y de la matriz ampliada que representamos, como siempre, en la forma

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & r_{5,2} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} & 0 \\ -r_{3,1} & 0 & -r_{5,1} \\ 0 & r_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,1} \end{array} \right).$$

En este caso, por eliminación Gaussiana se tiene la siguiente forma escalonada

$$\left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & r_{5,2} \\ 0 & r_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_{3,1}r_{5,2}-r_{3,2}r_{5,1}}{r_{3,2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

y como $\frac{r_{3,1}r_{5,2}-r_{3,2}r_{5,1}}{r_{3,2}} = 0$ resulta que $rg(A) = rg(A^*)$ siempre. Así que la ecuación 7 depende linealmente de las dos primeras.

f) Para las ecuaciones 1, 2 y 8 tenemos la siguiente ecuación

$$a(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}) + b(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}) = r_{5,4}r_{4,2}r_{5,2}$$

o, lo que es lo mismo,

$$a(r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2) + b(r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2) = r_{5,4}r_2^2 + r_{4,2}r_5^2 - r_{5,2}r_4^2.$$

Entonces el correspondiente sistema es

$$\left(\begin{array}{cc} r_{3,2} & r_{4,3} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} \\ -r_{3,1} & 0 \\ 0 & r_{3,1} \\ 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{5,4} \\ -r_{5,2} \\ r_{4,2} \end{pmatrix},$$

lo que da lugar al estudio de los rangos de la matriz de los coeficientes A y de la matriz ampliada

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & 0 \\ r_{2,1} & -r_{4,1} & 0 \\ -r_{3,1} & 0 & r_{5,4} \\ 0 & r_{3,1} & -r_{5,2} \\ 0 & 0 & r_{4,2} \end{array} \right)$$

que tiene por matriz escalonada a

$$\left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & 0 \\ 0 & -\frac{r_{2,1}r_{4,3}+r_{3,2}r_{4,1}}{r_{3,2}} & 0 \\ 0 & 0 & r_{5,4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

y como $-\frac{r_{2,1}r_{4,3}+r_{3,2}r_{4,1}}{r_{3,2}} = 0$ resulta que si $r_{5,4} = 0$ entonces $rg(A) = rg(A^*)$ siempre; y si $r_{5,4} \neq 0$ entonces $rg(A) < rg(A^*)$ y en esta circunstancia las ecuaciones 1, 2 y 8 son linealmente independientes.

g) Para las ecuaciones 1, 2 y 9 tenemos la ecuación

$$a(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}) + b(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}) = r_{5,4}r_{4,3}r_{5,3}$$

o, lo que es lo mismo,

$$a(r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2) + b(r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2) = r_{5,3}r_3^2 + r_{3,1}r_5^2 - r_{5,1}r_4^2.$$

Entonces, el sistema es

$$\begin{pmatrix} r_{3,2} & r_{4,3} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} \\ -r_{3,1} & 0 \\ 0 & r_{3,1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_{5,4} \\ 0 \\ -r_{5,3} \\ r_{4,3} \end{pmatrix}$$

lo que da lugar al estudio de los rangos de la matriz de los coeficientes A y de la matriz ampliada, que representamos en la forma

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & 0 \\ r_{2,1} & -r_{4,1} & r_{5,4} \\ -r_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{3,1} & -r_{5,3} \\ 0 & 0 & r_{4,3} \end{array} \right),$$

y, por eliminación Gaussiana, se tiene la siguiente forma escalonada

$$\left(\begin{array}{cc|c} -r_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{4,3} & 0 \\ 0 & 0 & r_{5,4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

de manera que si $r_{5,4} = 0$ entonces $rg(A) = rg(A^*)$ siempre; y si $r_{5,4} \neq 0$ entonces $rg(A) < rg(A^*)$ y en esta circunstancia las ecuaciones 1, 2 y 9 son linealmente independientes.

h) Finalmente, para las ecuaciones 1, 2 y 10 tenemos

$$a(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}) + b(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}) = r_{5,3}r_{3,2}r_{5,2}$$

o, lo que es lo mismo,

$$a (r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2) + b (r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2) = r_{5,3}r_2^2 + r_{3,2}r_5^2 - r_{5,2}r_3^2.$$

Así que el correspondiente sistema es

$$\begin{pmatrix} r_{3,2} & r_{4,3} \\ r_{2,1} & -r_{4,1} \\ -r_{3,1} & 0 \\ 0 & r_{3,1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r_{5,2} \\ r_{5,3} \\ 0 \\ r_{3,2} \end{pmatrix},$$

lo que da lugar al estudio de los rangos de la matriz de los coeficientes A y de la matriz ampliada, que representamos en la forma

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & 0 \\ r_{2,1} & -r_{4,1} & -r_{5,2} \\ -r_{3,1} & 0 & r_{5,3} \\ 0 & r_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,2} \end{array} \right),$$

y, por eliminación Gaussiana, se tiene la siguiente forma escalonada

$$\left(\begin{array}{cc|c} r_{3,2} & r_{4,3} & 0 \\ 0 & r_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{5,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde se observa que si $r_{5,3} = 0$ entonces $rg(A) = rg(A^*)$ siempre; y si $r_{5,3} \neq 0$ entonces $rg(A) < rg(A^*)$ y en esta circunstancia las ecuaciones 1, 2 y 10 son linealmente independientes.

En resumen, a las dos primeras ecuaciones 1 y 2 se les puede añadir, como tercera, cualquiera de las que les siguen, excepto la séptima, siempre que se cumplan los requisitos establecidos en cada caso.

Así, por ejemplo, sobre la base de que las ecuaciones 1 y 2 son las iniciales, el método que estamos desarrollando no daría solución única cuando se añada la ecuación número 5 y $r_{5,4} = 0$. Así que, si esto ocurriera, habría que cambiar esta ecuación por cualquiera de las restantes (excepto la séptima, por supuesto) siempre que se cumplan los requisitos establecidos en el apartado correspondiente. Naturalmente, disponemos de otras opciones, como utilizar las ecuaciones 2, 3 y 7 con la

restricción correspondiente, ya que en este caso tendríamos la siguiente situación: al buscar posibles soluciones de a y b en la siguiente ecuación

$$a(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}) + b(r_{4,2}r_{2,1}r_{4,1}) = r_{5,2}r_{2,1}r_{5,1}$$

o, lo que es lo mismo, en la ecuación

$$a(r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2) + b(r_{4,2}r_1^2 + r_{2,1}r_4^2 - r_{4,1}r_2^2) = r_{5,2}r_1^2 + r_{2,1}r_5^2 - r_{5,1}r_2^2,$$

tenemos que, identificando los coeficientes,

$$\begin{pmatrix} r_{4,3} & r_{4,2} \\ 0 & -r_{4,1} \\ -r_{4,1} & 0 \\ r_{3,1} & r_{2,1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{5,2} \\ -r_{5,1} \\ 0 \\ 0 \\ r_{2,1} \end{pmatrix},$$

lo que da lugar, para encontrar las soluciones, al estudio de los rangos de la matriz de los coeficientes, A , y de la matriz ampliada, que representamos en la forma

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} r_{4,3} & r_{4,2} & r_{5,2} \\ 0 & -r_{4,1} & -r_{5,1} \\ -r_{4,1} & 0 & 0 \\ r_{3,1} & r_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,1} \end{array} \right).$$

Pues bien, por eliminación Gaussiana resulta que la matriz escalonada correspondiente es

$$\left(\begin{array}{cc|c} r_{4,3} & r_{4,2} & r_{5,2} \\ 0 & -r_{4,1} & -r_{5,1} \\ 0 & 0 & r_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde si $r_{2,1} = 0$ resulta que $rg(A) = rg(A^*)$ siempre que $r_{4,3} \neq 0$, $-r_{4,1} \neq 0$ o, bien, que $-r_{4,1} = 0$, $-r_{5,1} = 0$ simultáneamente. En este caso las ecuaciones 2, 3 y 7 son dependientes. Pero si $r_{2,1} \neq 0$ entonces $rg(A) < rg(A^*)$ siempre. En este caso las ecuaciones 2, 3 y 7 son independientes, de manera que el sistema formado por ellas daría la solución única buscada. Naturalmente este proceso se puede sistematizar computacionalmente y hemos llegado a la siguiente conclusión: salvo en el caso de que todas las r_{ij} sean cero al mismo tiempo, se puede plantear un sistema para obtener una única localización mediante el procedimiento expuesto.

Así que, a partir de aquí vamos a suponer que podemos utilizar las ecuaciones 1, 2 y 5, es decir que, $r_{5,4} \neq 0$. Entonces, nuestro sistema es

$$\begin{aligned} r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= l_1 + m_1x + n_1y + v_1z \\ r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} &= l_2 + m_2x + n_2y + v_2z \\ r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} &= l_5 + m_5x + n_5y + v_5z \end{aligned} \quad (5.6)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & v_1 \\ m_2 & n_2 & v_2 \\ m_5 & n_5 & v_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} - l_1 \\ r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} - l_2 \\ r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} - l_5 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

de manera que, si

$$C = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 & v_1 \\ m_2 & n_2 & v_2 \\ m_5 & n_5 & v_5 \end{pmatrix},$$

se tiene que la solución (analítica) buscada es

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\det C} [(n_2v_5 - n_5v_2)(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} - l_1) + (-n_1v_5 + n_5v_1)(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} - l_2) + \\ &\quad (n_1v_2 - n_2v_1)(r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} - l_5)] \\ y &= \frac{1}{\det C} [(-m_2v_5 + m_5v_2)(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} - l_1) + (m_1v_5 - m_5v_1)(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} - l_2) + \\ &\quad (-m_1v_2 + m_2v_1)(r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} - l_5)] \\ z &= \frac{1}{\det C} [(m_2n_5 - n_2m_5)(r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} - l_1) + (-m_1n_5 + n_1m_5)(r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} - l_2) + \\ &\quad (m_1n_2 - m_2n_1)(r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} - l_5)]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Es importante destacar ahora, con referencia al comentario hecho al final del párrafo anterior, que $\det C$ tiene que ser distinto de cero para que exista esta solución, lo que significa, a la vista de los valores de C , que son los que vienen dados en (5.5),

que los satélites no pueden estar todos en el mismo plano orbital en los instantes de recepción de la señal y, en particular, no pueden ser todos ecuatoriales. Este hecho es, junto con los relativos a la eficiencia y economía de uso, precisamente el que pone en valor el método desarrollado en el capítulo anterior.

Finalmente, conviene que hagamos la siguiente observación:

La importancia del proceso mostrado hasta ahora radica en el hallazgo de soluciones únicas mediante el uso progresivo de dos métodos que, analíticamente, son muy eficientes. Esto se ve porque se pueden dar estas soluciones de manera sencilla (véase (4.33) y (5.8)). Pero el proceso no deja de ser lo que es: un hallazgo analítico que tiene que probar su eficiencia numérica.

Pues bien, hemos verificado que cuando se trata el problema numéricamente las matrices de los coeficientes de los sistemas son de tal naturaleza que los sistemas a resolver pueden estar mal condicionados para algunas configuraciones de satélites y, por esta razón, es preciso hacer un tratamiento numérico de estos sistemas muy cuidadoso, que es lo que se hace en el capítulo siguiente. En particular, la posibilidad de que los efectos “time-delay” de Shapiro para cada satélite pudieran quedar enmascarados por ruidos asociados a las mediciones nos obliga a plantear este problema, que es lo que hacemos a continuación adaptando a nuestro caso el procedimiento seguido en [15].

5.1.2. Sistemas con ruido

Para introducir un ruido en cada medición correspondiente a cada satélite, S_i , involucrado en el sistema (5.7), digamos ε_i (con $0 < \varepsilon_i \ll 1$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)), consideramos que la magnitud r_i está modificada por ε_i , de manera que la magnitud medida, h_i , queda determinada por

$$h_i = \frac{r_i}{1 - \varepsilon_i} \simeq r_i (1 + \varepsilon_i).$$

Entonces, considerando las nuevas magnitudes

$$h_{i,j} = h_i - h_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

se tiene que

$$h_{i+1,i} = h_{i+1} - h_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

y que

$$\begin{aligned}
h_{3,2} + h_{2,1} - h_{3,1} &= 0 \\
h_{4,3} + h_{3,1} - h_{4,1} &= 0 \\
h_{5,4} + h_{4,1} - h_{5,1} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Ahora, procediendo de manera análoga a como se hizo en (5.3) tenemos que

$$\begin{aligned}
h_{3,2}h_{2,1}h_{3,1} &= h_{3,2}h_1^2 + h_{2,1}h_3^2 - h_{3,1}h_2^2 \\
h_{4,3}h_{3,1}h_{4,1} &= h_{4,3}h_1^2 + h_{3,1}h_4^2 - h_{4,1}h_3^2 \\
h_{4,3}h_{3,1}h_{4,1} &= h_{4,3}h_1^2 + h_{3,1}h_4^2 - h_{4,1}h_3^2,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

de manera que, operando aquí, obtenemos para la primera ecuación:

$$\begin{aligned}
h_{3,2}h_{2,1}h_{3,1} &= h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + \\
&h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3)(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + \\
&(-2)(h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1)x_1 + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3)x_3 - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2)x_2)x + \\
&(-2)(h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1)y_1 + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3)y_3 - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2)y_2)y + \\
&(-2)(h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1)z_1 + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3)z_3 - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2)z_2)z + \\
&(h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1) + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3) - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2))(x^2 + y^2 + z^2) = \\
&h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1)K_1 + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3)K_3 - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2)K_2 + m_1x + n_1y + v_1z + \\
&(h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1) + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3) - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2))(x^2 + y^2 + z^2) = \\
&l_1 + m_1x + n_1y + v_1z + \\
&(h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1) + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3) - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2))(x^2 + y^2 + z^2)
\end{aligned}$$

y, análogamente, para las otras ecuaciones. De esta manera, el sistema (5.10) queda en la forma

$$\begin{aligned} h_{3,2}h_{2,1}h_{3,1} &= l_1 + m_1x + n_1y + v_1z + t_1, \\ h_{4,3}h_{3,1}h_{4,1} &= l_2 + m_2x + n_2y + v_2z + t_2, \\ h_{5,4}h_{4,1}h_{5,1} &= l_5 + m_5x + n_5y + v_5z + t_5, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde

$$\begin{aligned} l_1 &= h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1)K_1 + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3)K_3 - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2)K_2, \\ l_2 &= h_{4,3}(1 + 2\varepsilon_1)K_1 + h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_4)K_4 - h_{4,1}(1 + 2\varepsilon_3)K_3, \\ l_5 &= h_{5,4}(1 + 2\varepsilon_1)K_1 + h_{4,1}(1 + 2\varepsilon_5)K_5 - h_{5,1}(1 + 2\varepsilon_4)K_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= (-2)(h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1)x_1 + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3)x_3 - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2)x_2), \\ m_2 &= (-2)(h_{4,3}(1 + 2\varepsilon_1)x_1 + h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_4)x_4 - h_{4,1}(1 + 2\varepsilon_3)x_3), \\ m_5 &= (-2)(h_{5,4}(1 + 2\varepsilon_1)x_1 + h_{4,1}(1 + 2\varepsilon_5)x_5 - h_{5,1}(1 + 2\varepsilon_4)x_4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 &= (-2)(h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1)y_1 + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3)y_3 - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2)y_2), \\ n_2 &= (-2)(h_{4,3}(1 + 2\varepsilon_1)y_1 + h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_4)y_4 - h_{4,1}(1 + 2\varepsilon_3)y_3), \\ n_5 &= (-2)(h_{5,4}(1 + 2\varepsilon_1)y_1 + h_{4,1}(1 + 2\varepsilon_5)y_5 - h_{5,1}(1 + 2\varepsilon_4)y_4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= (-2)(h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1)z_1 + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3)z_3 - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2)z_2), \\ v_2 &= (-2)(h_{4,3}(1 + 2\varepsilon_1)z_1 + h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_4)z_4 - h_{4,1}(1 + 2\varepsilon_3)z_3), \\ v_5 &= (-2)(h_{5,4}(1 + 2\varepsilon_1)z_1 + h_{4,1}(1 + 2\varepsilon_5)z_5 - h_{5,1}(1 + 2\varepsilon_4)z_4); \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} t_1 &= (h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1) + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3) - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2))(x^2 + y^2 + z^2), \\ t_2 &= (h_{4,3}(1 + 2\varepsilon_1) + h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_4) - h_{4,1}(1 + 2\varepsilon_3))(x^2 + y^2 + z^2), \\ t_5 &= (h_{5,4}(1 + 2\varepsilon_1) + h_{4,1}(1 + 2\varepsilon_5) - h_{5,1}(1 + 2\varepsilon_4))(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo, en la forma

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & v_1 \\ m_2 & n_2 & v_2 \\ m_5 & n_5 & v_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{3,2}h_{2,1}h_{3,1} - l_1 - t_1 \\ h_{4,3}h_{3,1}h_{4,1} - l_2 - t_2 \\ h_{5,4}h_{4,1}h_{5,1} - l_5 - t_5 \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

donde se ve, a partir de las expresiones obtenidas para t_1 , t_2 y t_5 , que este sistema, al contrario de lo que ocurre con el sistema en (5.6), no es lineal, aunque se puede resolver fácilmente. Por ejemplo, si consideramos el término t_1 tenemos que

$$(h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1) + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3) - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2))(x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$(h_{3,2} + h_{2,1} - h_{3,1})(x^2 + y^2 + z^2) +$$

$$2(h_{3,2}\varepsilon_1 + h_{2,1}\varepsilon_3 - h_{3,1}\varepsilon_2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

de manera que, como $h_{3,2} + h_{2,1} - h_{3,1} = 0$ siempre, entonces, de acuerdo con (5.9), resulta que si $(h_{3,2}\varepsilon_1 + h_{2,1}\varepsilon_3 - h_{3,1}\varepsilon_2) = 0$ entonces la primera fila del término independiente se reduce a la primera fila del correspondiente término en (5.7). Y esto ocurre igual para los términos t_2 y t_5 . Por lo tanto, podemos resolver el sistema (5.11) por iteración sustituyendo en los términos cuadráticos del sistema en (5.12) la solución encontrada para x , y y z , que está en (5.8).

Y ahora ya estamos en condiciones de pasar al problema de la Geolocalización por TDOA con cinco satélites en la aproximación postnewtoniana.

5.2. Ecuaciones en la aproximación postnewtoniana (Relatividad General)

Consideramos de nuevo las correcciones relativistas p_{ij} , que vienen dadas por

$$p_{ij} = m \left\{ 2 \log \left[\frac{(tg \frac{\theta_{0i}}{2}) (tg \frac{\theta_j}{2})}{(tg \frac{\theta_{0j}}{2}) (tg \frac{\theta_i}{2})} \right] + (\cos \theta_{0i} - \cos \theta_{0j}) + (\cos \theta_j - \cos \theta_i) \right\}. \quad (5.13)$$

En este caso tenemos que

$$r_{i,j} = (r_i - r_j) (1 - \eta_{ij}) \text{ con } \eta_{ij} = -\frac{p_{ij}}{r_i - r_j} \text{ y } r_i \neq r_j; \quad (5.14)$$

y como ocurre, por ejemplo para la primera ecuación, que

$$r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1} = (r_3 - r_2) (1 - \eta_{32}) + (r_2 - r_1) (1 - \eta_{12}) -$$

$$(r_3 - r_1)(1 - \eta_{31}) = r_3 - r_2 + r_2 - r_1 - r_3 + r_1 + r_{3,2}\eta_{32} + r_{2,1}\eta_{21} - r_{3,1}\eta_{31}$$

y con análogos resultados para las otras dos ecuaciones, resulta que

$$r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1} = r_{3,2}\eta_{32} + r_{2,1}\eta_{21} - r_{3,1}\eta_{31},$$

$$r_{4,3} + r_{3,1} - r_{4,1} = r_{4,3}\eta_{43} + r_{3,1}\eta_{31} - r_{4,1}\eta_{41},$$

$$r_{5,4} + r_{4,1} - r_{5,1} = r_{5,4}\eta_{54} + r_{4,1}\eta_{41} - r_{5,1}\eta_{51},$$

de manera que, si se multiplican los tres sumandos en cada ecuación y se tiene en cuenta la aproximación $(1 + \eta_{32})(1 + \eta_{21})(1 + \eta_{31}) = (1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31})$ que ya se utilizó anteriormente, resulta que

$$\begin{aligned} r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= (r_3 - r_2)(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)(1 + \eta_{32})(1 + \eta_{21})(1 + \eta_{31}) = \\ &= (r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_3^2 - r_{3,1}r_2^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\ r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} &= (r_4 - r_3)(r_3 - r_1)(r_4 - r_1)(1 + \eta_{43})(1 + \eta_{31})(1 + \eta_{41}) = \\ &= (r_{4,3}r_1^2 + r_{3,1}r_4^2 - r_{4,1}r_3^2)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\ r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} &= (r_5 - r_4)(r_4 - r_1)(r_5 - r_1)(1 + \eta_{54})(1 + \eta_{41})(1 + \eta_{51}) = \\ &= (r_{5,4}r_1^2 + r_{4,1}r_5^2 - r_{5,1}r_4^2)(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

(Como antes, en caso de que para algunos i, j ocurra que $r_i = r_j$ entonces hay que eliminar el correspondiente término η_{ij} ya que, en este caso, p_{ij} se hace cero).

Así que, sustituyendo r_i^2 por $(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) se tiene para la primera ecuación que

$$\begin{aligned} r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= (r_{3,2}r_1^2 + r_{2,1}r_4^2 - r_{3,1}r_3^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) = \\ &= [r_{3,2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + r_{2,1}(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) - r_{3,1}(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + \\ &+ (-2)(r_{3,2}x_1 + r_{2,1}x_3 - r_{3,1}x_2)x + (-2)(r_{3,2}y_1 + r_{2,1}y_3 - r_{3,1}y_2)y + \\ &+ (-2)(r_{3,2}z_1 + r_{2,1}z_3 - r_{3,1}z_2)z + (r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1})(x^2 + y^2 + z^2)] \times \end{aligned}$$

$$(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) =$$

$$(r_{3,2}K_1 + r_{2,1}K_3 - r_{3,1}K_2 + m_1x + n_1y + v_1z)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) +$$

$$(r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1})(x^2 + y^2 + z^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}),$$

con análogos resultados para las dos restantes. Ahora bien, como $r_{3,2} + r_{2,1} - r_{3,1} = 0$, entonces el último sumando de esta ecuación resulta ser cero, con lo que, finalmente, tenemos que

$$r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} = (l_1 + m_1x + n_1y + v_1z)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}).$$

Por lo tanto, procediendo de manera análoga con las otras dos ecuaciones resulta que el sistema (5.15) se reduce al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1} &= (l_1 + m_1x + n_1y + v_1z)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\ r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1} &= (l_2 + m_2x + n_2y + v_2z)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\ r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1} &= (l_5 + m_5x + n_5y + v_5z)(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51}), \end{aligned} \quad (5.16)$$

aquí definimos

$$\bar{l}_1 = (r_{3,2}K_1 + r_{2,1}K_3 - r_{3,1}K_2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}),$$

$$\bar{l}_2 = (r_{4,3}K_1 + r_{3,1}K_4 - r_{4,1}K_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}),$$

$$\bar{l}_5 = (r_{5,4}K_1 + r_{4,1}K_5 - r_{5,1}K_4)(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51});$$

$$\bar{m}_1 = (-2)(r_{3,2}x_1 + r_{2,1}x_3 - r_{3,1}x_2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}),$$

$$\bar{m}_2 = (-2)(r_{4,3}x_1 + r_{3,1}x_4 - r_{4,1}x_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}),$$

$$\bar{m}_5 = (-2)(r_{5,4}x_1 + r_{4,1}x_5 - r_{5,1}x_4)(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51});$$

$$\bar{n}_1 = (-2)(r_{3,2}y_1 + r_{2,1}y_3 - r_{3,1}y_2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}),$$

$$\bar{n}_2 = (-2)(r_{4,3}y_1 + r_{3,1}y_4 - r_{4,1}y_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}),$$

$$\bar{n}_5 = (-2)(r_{5,4}y_1 + r_{4,1}y_5 - r_{5,1}y_4)(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51});$$

y

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= (-2)(r_{3,2}z_1 + r_{2,1}z_3 - r_{3,1}z_2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}), \\ \bar{v}_2 &= (-2)(r_{4,3}z_1 + r_{3,1}z_4 - r_{4,1}z_3)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}), \\ \bar{v}_5 &= (-2)(r_{5,4}z_1 + r_{4,1}z_5 - r_{5,1}z_4)(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51}).\end{aligned}$$

Si introducimos ahora \bar{p}_1 , \bar{p}_2 y \bar{p}_5 de acuerdo con las siguientes expresiones

$$\bar{p}_1 = r_{3,2}r_{2,1}r_{3,1}; \quad \bar{p}_2 = r_{4,3}r_{3,1}r_{4,1}; \quad \bar{p}_5 = r_{5,4}r_{4,1}r_{5,1},$$

entonces (5.16) se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= \bar{l}_1 + \bar{m}_1x + \bar{n}_1y + \bar{v}_1z, \\ \bar{p}_2 &= \bar{l}_2 + \bar{m}_2x + \bar{n}_2y + \bar{v}_2z, \\ \bar{p}_5 &= \bar{l}_5 + \bar{m}_5x + \bar{n}_5y + \bar{v}_5z,\end{aligned}\tag{5.17}$$

que, como siempre, se puede visualizar mejor al escribirlo en la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} \bar{m}_1 & \bar{n}_1 & \bar{v}_1 \\ \bar{m}_2 & \bar{n}_2 & \bar{v}_2 \\ \bar{m}_5 & \bar{n}_5 & \bar{v}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{p}_1 - \bar{l}_1 \\ \bar{p}_2 - \bar{l}_2 \\ \bar{p}_5 - \bar{l}_5 \end{pmatrix}.\tag{5.18}$$

5.2.1. Formulación postnewtoniana con ruido

Ahora podemos estudiar la contribución del ruido en el planteamiento postnewtoniano de manera sencilla. En efecto, podemos definir H_{ij} por

$$H_{ij} = h_{ij}(1 + \eta_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5),$$

de manera que

$$H_{ij} = [r_i(1 + \varepsilon_i) - r_j(1 + \varepsilon_j)](1 + \eta_{ij}) =$$

$$r_i(1 + \varepsilon_i)(1 + \eta_{ij}) - r_j(1 + \varepsilon_j)(1 + \eta_{ij}) =$$

$$r_i(1 + \varepsilon_i + \eta_{ij}) - r_j(1 + \varepsilon_j + \eta_{ij}) =$$

$$r_i(1 + \varepsilon_i(1 + \frac{\eta_{ij}}{\varepsilon_i})) - r_j(1 + \varepsilon_j(1 + \frac{\eta_{ij}}{\varepsilon_j})) =$$

$$r_i(1 + \eta_{ij}(1 + \frac{\varepsilon_i}{\eta_{ij}})) - r_j(1 + \eta_{ij}(1 + \frac{\varepsilon_j}{\eta_{ij}}))$$

y, por lo tanto, resulta que si η_{ij} es despreciable frente a ε_i y ε_j entonces el sistema a resolver es el sistema en (5.12); y si ε_i y ε_j son despreciables frente a η_{ij} entonces hay que resolver el sistema en (5.18).

Ahora, puesto que en el caso postnewtoniano

$$H_{3,2} + H_{2,1} - H_{3,1} = h_{3,2}(1 + \eta_{32}) + h_{2,1}(1 + \eta_{21}) - h_{3,1}(1 + \eta_{31}) =$$

$$h_{3,2}\eta_{32} + h_{2,1}\eta_{21} - h_{3,1}\eta_{31},$$

$$H_{4,3} + H_{3,1} - H_{4,1} = h_{4,3}(1 + \eta_{43}) + h_{3,1}(1 + \eta_{31}) - h_{4,1}(1 + \eta_{41}) =$$

$$h_{4,3}\eta_{43} + h_{3,1}\eta_{31} - h_{4,1}\eta_{41},$$

$$H_{5,4} + H_{4,1} - H_{5,1} = h_{5,4}(1 + \eta_{54}) + h_{4,1}(1 + \eta_{41}) - h_{5,1}(1 + \eta_{51}) = \quad (5.19)$$

$$h_{5,4}\eta_{54} + h_{4,1}\eta_{41} - h_{5,1}\eta_{51},$$

entonces el sistema resultante es

$$H_{3,2}H_{2,1}H_{3,1} = (h_{3,2}h_1^2 + h_{2,1}h_3^2 - h_{3,1}h_2^2)(1 + \eta_{32})(1 + \eta_{21})(1 + \eta_{31})$$

$$H_{4,3}H_{3,1}H_{4,1} = (h_{4,3}h_1^2 + h_{3,1}h_4^2 - h_{4,1}h_3^2)(1 + \eta_{43})(1 + \eta_{31})(1 + \eta_{41})$$

$$H_{5,4}H_{4,1}H_{5,1} = (h_{5,4}h_1^2 + h_{4,1}h_5^2 - h_{5,1}h_4^2)(1 + \eta_{54})(1 + \eta_{41})(1 + \eta_{51}). \quad (5.20)$$

Así que, operando, obtenemos para la primera ecuación:

$$H_{3,2}H_{2,1}H_{3,1} = h_{3,2}(1 + \eta_{32})h_{2,1}(1 + \eta_{21})h_{3,1}(1 + \eta_{31}) =$$

$$\begin{aligned}
& \left[h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + \right. \\
& h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2) (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + \\
& (-2)(h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) x_1 + h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) x_3 - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2) x_2) x + \\
& (-2)(h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) y_1 + h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) y_3 - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2) y_2) y + \\
& (-2)(h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) z_1 + h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) z_3 - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2) z_2) z + \\
& \left. (h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) + h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2)) (x^2 + y^2 + z^2) \right] \times
\end{aligned}$$

$$(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) =$$

$$[h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) K_1 + h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) K_3 - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2) K_2 + m_1 x + n_1 y + v_1 z +$$

$$(h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) + h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2)) (x^2 + y^2 + z^2)] \times$$

$$(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) =$$

$$= (l_1 + m_1 x + n_1 y + v_1 z) (1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) +$$

$$((h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) + h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2)) (x^2 + y^2 + z^2)) \times$$

$$(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) =$$

$$(l_1 + m_1 x + n_1 y + v_1 z) (1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) +$$

$$(h_{3,2}2\varepsilon_1 + h_{2,1}2\varepsilon_3 - h_{3,1}2\varepsilon_2)(x^2 + y^2 + z^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}).$$

Y teniendo en cuenta que $h_{3,2} + h_{2,1} - h_{3,1} = 0$ resulta, al despreciar los productos $\epsilon_k \eta_{ij}$, que

$$(l_1 + m_1x + n_1y + v_1z)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) +$$

$$(2\varepsilon_1(r_3(1 + \varepsilon_3) - r_2(1 + \varepsilon_2)) + 2\varepsilon_3(r_2(1 + \varepsilon_2) - r_1(1 + \varepsilon_1))$$

$$- 2\varepsilon_2(r_3(1 + \varepsilon_3) - r_1(1 + \varepsilon_1))(x^2 + y^2 + z^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) =$$

$$(l_1 + m_1x + n_1y + v_1z)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) +$$

$$(2\varepsilon_1r_{3,2} + 2\varepsilon_3r_{2,1} - 2\varepsilon_2r_{3,1})(x^2 + y^2 + z^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}).$$

De la misma manera podemos proceder con las otras dos ecuaciones. Así que finalmente tenemos como sistema a resolver el siguiente sistema:

$$H_{3,2}H_{2,1}H_{3,1} = (l_1 + m_1x + n_1y + v_1z)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) +$$

$$(2\varepsilon_1r_{3,2} + 2\varepsilon_3r_{2,1} - 2\varepsilon_2r_{3,1})(x^2 + y^2 + z^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31})$$

$$H_{4,3}H_{3,1}H_{4,1} = (l_2 + m_2x + n_2y + v_2z)(1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}) +$$

$$(2\varepsilon_1r_{4,3} + 2\varepsilon_4r_{3,1} - 2\varepsilon_3r_{4,1})(x^2 + y^2 + z^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31})$$

$$H_{5,4}H_{4,1}H_{5,1} = (l_5 + m_5x + n_5y + v_5z)(1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51}) +$$

$$(2\varepsilon_1r_{5,4} + 2\varepsilon_5r_{4,1} - 2\varepsilon_4r_{5,1})(x^2 + y^2 + z^2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}) \quad (5.21)$$

o, bien, definiendo $\bar{\bar{l}}_i, \bar{\bar{m}}_i, \bar{\bar{n}}_i, \bar{\bar{v}}_i, \bar{\bar{p}}_i$ y $\bar{\bar{t}}_i$ ($i = 1, 2, 5$) de la siguiente manera:

$$\bar{\bar{l}}_1 = (h_{3,2}(1 + 2\varepsilon_1)K_1 + h_{2,1}(1 + 2\varepsilon_3)K_3 - h_{3,1}(1 + 2\varepsilon_2)K_2)(1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}),$$

$$\bar{\bar{l}}_2 = (h_{4,3} (1 + 2\varepsilon_1) K_1 + h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_4) K_4 - h_{4,1} (1 + 2\varepsilon_3) K_3) (1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}),$$

$$\bar{\bar{l}}_5 = (h_{5,4} (1 + 2\varepsilon_1) K_1 + h_{4,1} (1 + 2\varepsilon_5) K_5 - h_{5,1} (1 + 2\varepsilon_4) K_4) (1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51});$$

$$\bar{\bar{m}}_1 = ((-2)(h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) x_1 + h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) x_3 - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2) x_2)) (1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}),$$

$$\bar{\bar{m}}_2 = ((-2)(h_{4,3} (1 + 2\varepsilon_1) x_1 + h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_4) x_4 - h_{4,1} (1 + 2\varepsilon_3) x_3)) (1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}),$$

$$\bar{\bar{m}}_5 = ((-2)(h_{5,4} (1 + 2\varepsilon_1) x_1 + h_{4,1} (1 + 2\varepsilon_5) x_5 - h_{5,1} (1 + 2\varepsilon_4) x_4)) (1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51});$$

$$\bar{\bar{n}}_1 = (-2)(h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) y_1 + h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) y_3 - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2) y_2) (1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}),$$

$$\bar{\bar{n}}_2 = ((-2)(h_{4,3} (1 + 2\varepsilon_1) y_1 + h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_4) y_4 - h_{4,1} (1 + 2\varepsilon_3) y_3)) (1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}),$$

$$\bar{\bar{n}}_5 = ((-2)(h_{5,4} (1 + 2\varepsilon_1) y_1 + h_{4,1} (1 + 2\varepsilon_5) y_5 - h_{5,1} (1 + 2\varepsilon_4) y_4)) (1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51});$$

$$\bar{\bar{v}}_1 = (-2)(h_{3,2} (1 + 2\varepsilon_1) z_1 + h_{2,1} (1 + 2\varepsilon_3) z_3 - h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_2) z_2) (1 + \eta_{32} + \eta_{21} + \eta_{31}),$$

$$\bar{\bar{v}}_2 = ((-2)(h_{4,3} (1 + 2\varepsilon_1) z_1 + h_{3,1} (1 + 2\varepsilon_4) z_4 - h_{4,1} (1 + 2\varepsilon_3) z_3)) (1 + \eta_{43} + \eta_{31} + \eta_{41}),$$

$$\bar{\bar{v}}_5 = ((-2)(h_{5,4} (1 + 2\varepsilon_1) z_1 + h_{4,1} (1 + 2\varepsilon_5) z_5 - h_{5,1} (1 + 2\varepsilon_4) z_4)) (1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51})$$

$$\bar{\bar{p}}_1 = H_{3,2}H_{2,1}H_{3,1}; \quad \bar{\bar{p}}_2 = H_{4,3}H_{3,1}H_{4,1}; \quad \bar{\bar{p}}_5 = H_{5,4}H_{4,1}H_{5,1},$$

$$\bar{\bar{t}}_1 = (2\varepsilon_1 r_{3,2} + 2\varepsilon_3 r_{2,1} - 2\varepsilon_2 r_{3,1}) (x^2 + y^2 + z^2) (1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51}),$$

$$\bar{\bar{t}}_2 = (2\varepsilon_1 r_{4,3} + 2\varepsilon_4 r_{3,1} - 2\varepsilon_3 r_{4,1}) (x^2 + y^2 + z^2) (1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51}),$$

$$\bar{\bar{t}}_5 = (2\varepsilon_1 r_{5,4} + 2\varepsilon_5 r_{4,1} - 2\varepsilon_4 r_{5,1}) (x^2 + y^2 + z^2) (1 + \eta_{54} + \eta_{41} + \eta_{51}),$$

resulta que el sistema a resolver es

$$\begin{aligned} \bar{\bar{p}}_1 &= \bar{\bar{l}}_1 + \bar{\bar{m}}_1 x + \bar{\bar{n}}_1 y + \bar{\bar{v}}_1 z + \bar{\bar{t}}_1, \\ \bar{\bar{p}}_2 &= \bar{\bar{l}}_2 + \bar{\bar{m}}_2 x + \bar{\bar{n}}_2 y + \bar{\bar{v}}_2 z + \bar{\bar{t}}_2, \\ \bar{\bar{p}}_5 &= \bar{\bar{l}}_5 + \bar{\bar{m}}_5 x + \bar{\bar{n}}_5 y + \bar{\bar{v}}_5 z + \bar{\bar{t}}_5, \end{aligned} \tag{5.22}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{m}}_1 & \bar{\bar{n}}_1 & \bar{\bar{v}}_1 \\ \bar{\bar{m}}_2 & \bar{\bar{n}}_2 & \bar{\bar{v}}_2 \\ \bar{\bar{m}}_5 & \bar{\bar{n}}_5 & \bar{\bar{v}}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\bar{p}}_1 - \bar{\bar{l}}_1 - \bar{\bar{t}}_1 \\ \bar{\bar{p}}_2 - \bar{\bar{l}}_2 - \bar{\bar{t}}_2 \\ \bar{\bar{p}}_5 - \bar{\bar{l}}_5 - \bar{\bar{t}}_5 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

que, igual que en el caso anterior, se puede resolver por iteración.

5.3. Matrices de diseño

Para tratar las correspondientes soluciones mediante el método de los mínimos cuadrados en los dos niveles de aproximación adoptamos como valores TDOA teóricos para el caso clásico los siguientes valores:

$$r_{i,j} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} - \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2}.$$

A su vez, denotamos por $r_{(i,j)_0}$ los valores experimentales de los observables que se utilizan para determinar de manera exacta la solución encontrada, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, es decir, los datos TDOA utilizados para encontrar esa solución y, finalmente, denotamos por $r_{i,j}^0$ otros valores experimentales para $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ($i \neq j$).

Entonces, considerando el polinomio de Taylor entorno del punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$r_{i,j} = r_{i,j}^0 + \varepsilon_{ij} = r_{i,j_0} + \left(\frac{\partial r_{i,j}}{\partial x} \right)_{P_0} \Delta x + \left(\frac{\partial r_{i,j}}{\partial y} \right)_{P_0} \Delta y + \left(\frac{\partial r_{i,j}}{\partial z} \right)_{P_0} \Delta z,$$

donde $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ y $\Delta z = z - z_0$, y despreciando los términos de orden superior, tenemos el sistema

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial r_{i,j}}{\partial x} \right)_{P_0} \Delta x + \left(\frac{\partial r_{i,j}}{\partial y} \right)_{P_0} \Delta y + \left(\frac{\partial r_{i,j}}{\partial z} \right)_{P_0} \Delta z + (r_{i,j_0} - r_{i,j}^0)$$

o, lo que es lo mismo, el sistema

$$V = AX + W,$$

donde $X^T = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ es la matriz de las incógnitas; $W^T = (r_{2,1_0} - r_{2,1}^0, r_{3,2_0} - r_{3,2}^0, r_{4,1_0} - r_{4,1}^0, r_{4,5_0} - r_{4,5}^0, r_{3,1_0} - r_{3,1}^0, r_{4,3_0} - r_{4,3}^0, r_{5,1_0} - r_{5,1}^0, r_{4,2_0} - r_{4,2}^0, r_{5,2_0} - r_{5,2}^0, r_{3,5_0} - r_{3,5}^0)$; $V^T = (\varepsilon_{21}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{41}, \varepsilon_{45}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{43}, \varepsilon_{51}, \varepsilon_{42}, \varepsilon_{52}, \varepsilon_{35})$ es la matriz de los errores y

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{(x_2-x_0)}{r_{20}} + \frac{(x_1-x_0)}{r_{10}} & -\frac{(y_2-y_0)}{r_{20}} + \frac{(y_1-y_0)}{r_{10}} & -\frac{(z_2-z_0)}{r_{20}} + \frac{(z_1-z_0)}{r_{10}} \\ -\frac{(x_3-x_0)}{r_{30}} + \frac{(x_2-x_0)}{r_{20}} & -\frac{(y_3-y_0)}{r_{30}} + \frac{(y_2-y_0)}{r_{20}} & -\frac{(z_3-z_0)}{r_{30}} + \frac{(z_2-z_0)}{r_{20}} \\ -\frac{(x_4-x_0)}{r_{40}} + \frac{(x_1-x_0)}{r_{10}} & -\frac{(y_4-y_0)}{r_{40}} + \frac{(y_1-y_0)}{r_{10}} & -\frac{(z_4-z_0)}{r_{40}} + \frac{(z_1-z_0)}{r_{10}} \\ -\frac{(x_4-x_0)}{r_{40}} + \frac{(x_5-x_0)}{r_{50}} & -\frac{(y_4-y_0)}{r_{40}} + \frac{(y_5-y_0)}{r_{50}} & -\frac{(z_4-z_0)}{r_{40}} + \frac{(z_5-z_0)}{r_{50}} \\ -\frac{(x_3-x_0)}{r_{30}} + \frac{(x_1-x_0)}{r_{10}} & -\frac{(y_3-y_0)}{r_{30}} + \frac{(y_1-y_0)}{r_{10}} & -\frac{(z_3-z_0)}{r_{30}} + \frac{(z_1-z_0)}{r_{10}} \\ -\frac{(x_4-x_0)}{r_{40}} + \frac{(x_3-x_0)}{r_{30}} & -\frac{(y_4-y_0)}{r_{40}} + \frac{(y_3-y_0)}{r_{30}} & -\frac{(z_4-z_0)}{r_{40}} + \frac{(z_3-z_0)}{r_{30}} \\ -\frac{(x_5-x_0)}{r_{50}} + \frac{(x_1-x_0)}{r_{10}} & -\frac{(y_5-y_0)}{r_{50}} + \frac{(y_1-y_0)}{r_{10}} & -\frac{(z_5-z_0)}{r_{50}} + \frac{(z_1-z_0)}{r_{10}} \\ -\frac{(x_4-x_0)}{r_{40}} + \frac{(x_2-x_0)}{r_{20}} & -\frac{(y_4-y_0)}{r_{40}} + \frac{(y_2-y_0)}{r_{20}} & -\frac{(z_4-z_0)}{r_{40}} + \frac{(z_2-z_0)}{r_{20}} \\ -\frac{(x_5-x_0)}{r_{50}} + \frac{(x_2-x_0)}{r_{20}} & -\frac{(y_5-y_0)}{r_{50}} + \frac{(y_2-y_0)}{r_{20}} & -\frac{(z_5-z_0)}{r_{50}} + \frac{(z_2-z_0)}{r_{20}} \\ -\frac{(x_3-x_0)}{r_{30}} + \frac{(x_5-x_0)}{r_{50}} & -\frac{(y_3-y_0)}{r_{30}} + \frac{(y_5-y_0)}{r_{50}} & -\frac{(z_3-z_0)}{r_{30}} + \frac{(z_5-z_0)}{r_{50}} \end{pmatrix}$$

es la matriz de diseño.

En el caso postnewtoniano adoptamos la siguiente notación:

$$\bar{r}_{ij} = r_{i,j} (1 - \eta_{ij}), \quad \eta_{ij} = -\frac{p_{ij}}{r_i - r_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (r_i \neq r_j),$$

donde, como siempre,

$$p_{ij} = m \left\{ 2 \left[\log \frac{\left(tg \frac{\theta_{0j}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_i}{2} \right)}{\left(tg \frac{\theta_{0j}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_i}{2} \right)} \right] + (\cos \theta_{0i} - \cos \theta_{0j}) - (\cos \theta_j - \cos \theta_i) \right\}$$

y

$$\bar{r}_{ij} = \left(\sqrt{(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2 + (z_i - \bar{z})^2} - \sqrt{(x_j - \bar{x})^2 + (y_j - \bar{y})^2 + (z_j - \bar{z})^2} \right) \times (1 + \eta_{ij})$$

son los valores teóricos.

Igual que antes, $r_{(i,j)_0}$ son los valores experimentales de los observables que se utilizan para determinar de manera exacta la solución en el caso postnewtoniano, $\bar{P}_0 = (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$, y $r_{i,j}^0$ son los valores del apartado anterior para $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ($i \neq j$).

Entonces, considerando el polinomio de Taylor entorno del punto $\bar{P}_0 = (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$:

$$\bar{r}_{ij} = r_{i,j}^0 + \bar{\varepsilon}_{ij} = r_{(i,j)_0} + \left(\frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{P}_0} \Delta \bar{x} + \left(\frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{P}_0} \Delta \bar{y} + \left(\frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{P}_0} \Delta \bar{z},$$

donde $\Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{x}_0$, $\Delta\bar{y} = \bar{y} - \bar{y}_0$ y $\Delta\bar{z} = \bar{z} - \bar{z}_0$, y despreciando los términos de orden superior, tenemos como sistema

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \left(\frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{x}} \right)_{\bar{P}_0} \Delta\bar{x} + \left(\frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{P}_0} \Delta\bar{y} + \left(\frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{z}} \right)_{\bar{P}_0} \Delta\bar{z} + ((r_{i,j})_0 - r_{i,j}^0),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\bar{V} = \bar{A} \bar{X} + \bar{W},$$

donde $\bar{X}^T = (\Delta\bar{x}, \Delta\bar{y}, \Delta\bar{z})$ es la matriz de las incógnitas; $\bar{W}^T = (r_{2,10} - r_{2,1}^0, r_{3,20} - r_{3,2}^0, r_{4,10} - r_{4,1}^0, r_{4,50} - r_{4,5}^0, r_{3,10} - r_{3,1}^0, r_{4,30} - r_{4,3}^0, r_{5,10} - r_{5,1}^0, r_{4,20} - r_{4,2}^0, r_{5,20} - r_{5,2}^0, r_{3,50} - r_{3,5}^0)$; $\bar{V}^T = (\bar{\varepsilon}_{21}, \bar{\varepsilon}_{32}, \bar{\varepsilon}_{41}, \bar{\varepsilon}_{45}, \bar{\varepsilon}_{31}, \bar{\varepsilon}_{43}, \bar{\varepsilon}_{51}, \bar{\varepsilon}_{42}, \bar{\varepsilon}_{52}, \bar{\varepsilon}_{35})$ es la matriz de los errores y \bar{A} es la matriz de diseño, que no escribimos en su totalidad de manera detallada porque sus elementos son de una extensión verdaderamente notable. No obstante, a modo de ejemplo, escribimos, a continuación el elemento \bar{a}_{11} :

$$\bar{a}_{11} = \left(\frac{(x_1 - \bar{x}_0)}{r_{10}} - \frac{(x_2 - \bar{x}_0)}{r_{20}} \right) + (\Psi)_{\bar{P}_0}$$

donde

$$(\Psi)_{\bar{P}_0} = m \left\{ 2 \left[M \times \frac{[[N + \tilde{N}] O]}{P} - Q \times [R + S] \right] - (T + U) - (V - W) \right\}$$

y

$$M = \left(\frac{tg(\frac{\theta_{01}}{2})tg(\frac{\theta_2}{2})}{tg(\frac{\theta_{02}}{2})tg(\frac{\theta_1}{2})} \right)^{-1},$$

$$M_i = (x_i - \bar{x}_0) x_i + (y_i - \bar{y}_0) y_i + (z_i - \bar{z}_0) z_i, \quad i = 1, 2 \quad (i \neq j)$$

$$N = \frac{(tg(\frac{\theta_2}{2})) \frac{(-1)}{2} \frac{(x_1 - 2\bar{x}_0)r_{10}^2 |\bar{P}_0|^2 - \tilde{N}_1 (-(x_1 - \bar{x}_0) |\bar{P}_0|^2 + r_1^2 \bar{x}_0)}{r_{10}^2 |\bar{P}_0|^2 \sqrt{r_{10}^2 |\bar{P}_0|^2 - \tilde{N}_1^2}}}{\cos^2 \left(\frac{\theta_{01}}{2} \right)},$$

$$N_i = r_{i0}^2 \sqrt{r_{i0}^2 K_i - M_i^2}, \quad K_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad i = 1, 2 \quad (i \neq j)$$

$$\tilde{N} = \frac{\left(tg\left(\frac{\theta_{01}}{2}\right) \right) \frac{(-1)}{2} \frac{-x_2 r_{20}^2 + M_2(x_2 - \bar{x}_0)}{N_2}}{\cos^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)},$$

$$\tilde{N}_i = (x_i - \bar{x}_0) \bar{x}_0 + (y_i - \bar{y}_0) \bar{y}_0 + (z_i - \bar{z}_0) \bar{z}_0, \quad i = 1, 2 \quad (i \neq j)$$

$$O = \left(tg \frac{\theta_{02}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_1}{2} \right),$$

$$P = tg^2\left(\frac{\theta_{02}}{2}\right) tg^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right),$$

$$Q = \frac{\left(tg \frac{\theta_{01}}{2} \right) \left(tg \frac{\theta_2}{2} \right)}{tg^2\left(\frac{\theta_{02}}{2}\right) tg^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)},$$

$$R = \frac{\left(tg\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right) \frac{(-1)}{2} \frac{(x_2 - 2\bar{x}_0) r_{20}^2 |\bar{P}_0|^2 - \tilde{N}_2 \left(-(x_2 - \bar{x}_0) |\bar{P}_0|^2 + r_{20}^2 \bar{x}_0 \right)}{r_{20}^2 |\bar{P}_0|^2 \sqrt{r_{20}^2 |\bar{P}_0|^2 - \tilde{N}_2^2}}}{\cos^2\left(\frac{\theta_{02}}{2}\right)},$$

$$S = \frac{\left(tg\left(\frac{\theta_{02}}{2}\right) \right) \frac{(-1)}{2} \frac{-x_1 r_{10}^2 + M_1(x_1 - \bar{x}_0)}{N_1}}{\cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)},$$

$$T = \left(\frac{(-1)}{2} \times \frac{(x_1 - 2\bar{x}_0) r_{10}^2 |\bar{P}_0|^2 - \tilde{N}_1 \left(-(x_1 - \bar{x}_0) |\bar{P}_0|^2 + r_{10}^2 \bar{x}_0 \right)}{r_{10}^2 |\bar{P}_0|^2 \sqrt{r_{10}^2 |\bar{P}_0|^2 - \tilde{N}_1^2}} \right) \text{sen} \theta_{01},$$

$$U = \left(\frac{(-1)}{2} \times \frac{(x_2 - 2\bar{x}_0) r_{20}^2 |\bar{P}_0|^2 - \tilde{N}_2 \left(-(x_2 - \bar{x}_0) |\bar{P}_0|^2 + r_{20}^2 \bar{x}_0 \right)}{r_{20}^2 |\bar{P}_0|^2 \sqrt{r_{20}^2 |\bar{P}_0|^2 - \tilde{N}_2^2}} \right) \text{sen} \theta_{02},$$

$$V = \left(\frac{(-1)}{2} \times \frac{-x_2 r_{20}^2 + M_2(x_2 - \bar{x}_0)}{N_2} \right) \text{sen} \theta_2,$$

y

$$W = \left(\frac{(-1)}{2} \times \frac{-x_1 r_{10}^2 + M_1 (x_1 - \bar{x}_0)}{N_1} \right) \text{sen} \theta_1.$$

Por su parte, para obtener los instantes correspondientes a la (única) localización (más probable) de acuerdo con los modelos newtoniano y postnewtoniano, así como las diferencias entre los tiempos de emisión previstos de acuerdo con el modelo postnewtoniano para cada satélite, t_{pn_i} ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), y el instante de emisión previsto de acuerdo con el modelo newtoniano para todos los satélites, t_{cl} , junto con los correspondientes retrasos temporales, $(t_{S_i} - t_{pn_i}) - (t_{S_i} - t_{cl})$, (según las circunstancias descritas en el Capítulo 3) disponemos, finalmente, de las relaciones siguientes:

$$t_{cl} = t_{S_1} - r_1 = t_{S_2} - r_2 = t_{S_3} - r_3, \quad (5.24)$$

$$t_{pn_i} = t_{S_i} - r_i - m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_i}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_i}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_i} - \cos \theta_{S_i} \right], \quad (5.25)$$

$$t_{pn_i} = t_{S_i} - r_i - 2m \log \frac{r_{S_i}}{r_T}, \quad (5.26)$$

$$t_{pn_i} = t_{cl} - m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_i}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_i}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_i} - \cos \theta_{S_i} \right], \quad (5.27)$$

$$t_{pn_i} = t_{cl} - 2m \log \frac{r_{S_i}}{r_T}, \quad (5.28)$$

$$(t_{S_i} - t_{pn_i}) - (t_{S_i} - t_{cl}) = m \left[2 \log \left(\frac{tg \frac{\theta_{T_i}}{2}}{tg \frac{\theta_{S_i}}{2}} \right) + \cos \theta_{T_i} - \cos \theta_{S_i} \right], \quad (5.29)$$

$$(t_{S_i} - t_{pn_i}) - (t_{S_i} - t_{cl}) = 2m \log \frac{r_{S_i}}{r_T}. \quad (5.30)$$

5.4. Resumen

Se pueden utilizar cinco satélites arbitrarios para obtener una única localización con la única restricción de que todos ellos no estén en el mismo plano orbital cuando reciben la señal del radiotransmisor. En particular, los satélites no pueden ser todos ecuatoriales y, por lo tanto, geoestacionarios. La ventaja de este método está en que con él se determina una única localización de manera autónoma, es decir, sin información adicional sobre la situación del radiotransmisor respecto de la Tierra, lo cual permite implementar automáticamente, además de la nuestra, otras propuestas para encontrar la localización más probable a partir de la solución

encontrada con el método (v., p. e., [2], [22], [43], [44], [45] y [49]). Y por supuesto, igual que en Navegación, este método permite utilizar configuraciones de satélites con las que se puedan minimizar los efectos de los errores de las mediciones en el cálculo de las localizaciones.

Capítulo 6

Simulación Numérica

El trabajo que se ha mostrado hasta ahora se puede sintetizar de la siguiente manera: primero, hemos desarrollado tres procedimientos con dos métodos básicos para localizar mediante datos TDOA radiotransmisores pasivos, estén éstos, o no, sobre la superficie de la Tierra y, segundo, estos procedimientos se han llevado a cabo con dos niveles de precisión, que son los que corresponden a los modelos newtoniano y postnewtoniano del espacio-tiempo que circunda a la Tierra.

Naturalmente, los procedimientos son correctos desde el punto de vista analítico, pero para que se puedan aplicar en la práctica es evidente que necesitamos mostrar su eficiencia computacional. Pues bien, este es el objeto del presente capítulo.

Las mayores dificultades encontradas en la realización de los programas han estado relacionadas con la necesidad de diferenciar de manera precisa las localizaciones newtonianas de las postnewtonianas o, en otras palabras, con la determinación del efecto “time-delay” de Shapiro. Estas dificultades surgen del hecho de que las funciones de universo que describen los dos modelos para el espacio-tiempo alrededor de la Tierra se diferencian en magnitudes que son del orden de la masa de la Tierra (medida en segundos).

Así, por ejemplo, para las dos ecuaciones (newtoniana y postnewtoniana) del primer método, esto es, las que determinan el pseudo-rango de las posibles localizaciones desde el satélite S_2 , se encuentran siempre raíces con valores muy próximos entre sí; y, con respecto al segundo método, nos encontramos con que las respectivas matrices de los coeficientes tienen en algunas ocasiones determinantes cuya diferencia alcanza valores muy próximos a cero (de hecho, en prácticamente todas las configuraciones de satélites consideradas los valores de estos determinantes se han diferenciado en el orden de 10^{-8}).

Por esta razón, en primer lugar hemos chequeado, utilizando MatLab, los cálculos básicos considerando posiciones de radiotransmisores que son representativas a efectos de garantizar la precisión.

En particular, hemos analizado la precisión de los dos métodos recalculando 200 posiciones a lo largo del ecuador terrestre y hemos verificado que los errores cometidos en el nivel newtoniano con respecto a las posiciones nominales prefijadas y las localizaciones de interés ($80^{\circ}W, 80^{\circ}E$) están por debajo de $10^{-6}cm$ (a modo de ejemplo, mostramos la *Fig.6.1*, que corresponde a la utilización de tres satélites geoestacionarios para localizar esas posiciones, así como la *Fig.6.2*, que corresponde a la utilización de cinco satélites, no todos ellos ecuatoriales).

A este respecto, es interesante resaltar que la fluctuación de los errores que aparecen en estas figuras, así como en cualquiera otra correspondiente a los chequeos realizados, es debida a que la precisión de estos métodos depende fuertemente de las variaciones de entre las doce y dieciocho variables independientes involucradas en el primero y segundo método, respectivamente, que son las coordenadas de los satélites y las de los radiotransmisores.

Finalmente, hemos comprobado que, a medida que el radiotransmisor cambia de posición, pueden aparecer configuraciones de satélites (con respecto del radiotransmisor) especialmente difíciles de tratar, como cuando algún satélite se alinea con el radiotransmisor con respecto del centro de la Tierra.

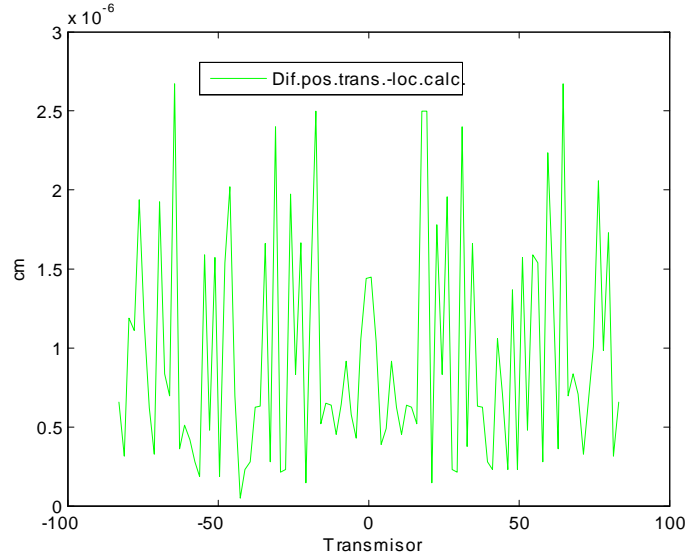


Fig.6.1

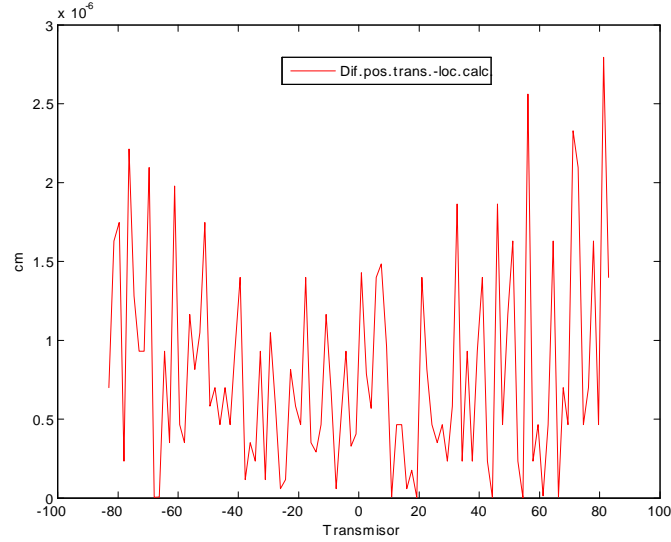


Fig.6.2

Una vez realizados estos chequeos, hemos obtenido a partir de datos TDOA, por un lado, las diferencias de localizaciones newtoniana y postnewtoniana, tanto las previstas como las calculadas por estos métodos y, por otro, las diferencias de tiempos de emisión, newtoniano y postnewtoniano, que les corresponden a cada satélite para un conjunto de radiotransmisores, de los cuales se ha determinado de antemano su posición newtoniana. Para ello hemos considerado, en primer lugar, radiotransmisores a lo largo del ecuador terrestre y, después, en el espacio exterior.

Para dar una idea del orden de las magnitudes involucradas en las respectivas geolocalizaciones, en la *Fig.6.3* mostramos, en línea de puntos, la diferencia teórica entre las localizaciones para radiotransmisores situados en el ecuador terrestre cuando se utilizan tres satélites geoestacionarios cuyas coordenadas en los instantes de recepción de la señal son: $S_1(41972 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(41972 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(41972 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$ y, en línea continua, las correspondientes diferencias de localizaciones calculadas por medio del primer método (como ya quedó dicho, estas diferencias se deben únicamente al retraso de las señales enviadas por los radiotransmisores a los

satélites prevista en la descripción postnewtoniana); y hemos concluido

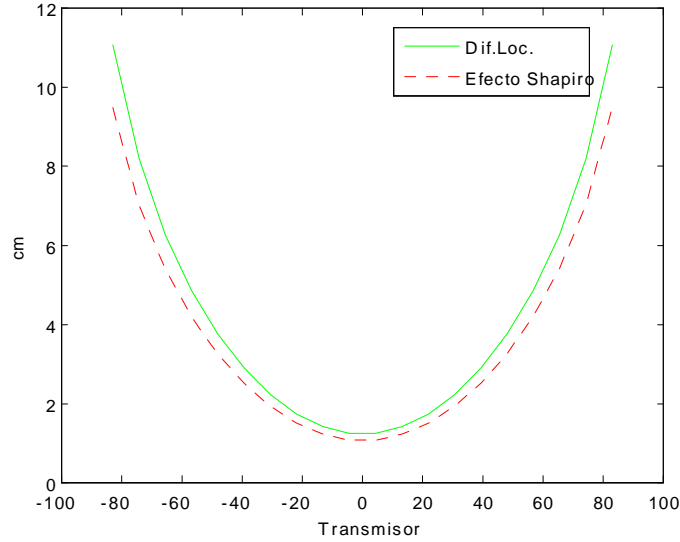


Fig.6.3

que con los dos métodos se alcanza la precisión necesaria para el objetivo propuesto, como se muestra en esta figura y se verá en las subsiguientes.

Quisiéramos también resaltar el hecho de que todas las configuraciones de los satélites consideradas en las simulaciones numéricas realizadas, algunas de las cuales se muestran a continuación, corresponden a distribuciones que, dentro de las limitaciones del modelo de Tierra, reflejan fielmente situaciones reales.

Finalmente, aunque los comentarios sobre estas simulaciones se hacen en el lugar apropiado, nos gustaría resaltar nuevamente el resultado ya mencionado de que un efecto pequeño cuando se refiere a un sólo satélite, como es el efecto “time-delay” de Shapiro, puede dar lugar a diferencias de localizaciones espaciales, así como de sus correspondientes instantes de emisión, bastante significativas para muchas de las configuraciones de satélites consideradas y, en particular, para las que se muestran en esta Tesis, especialmente cuando se utilizan cinco satélites. La razón de este resultado está en que con el segundo método se combinan diferentes efectos Shapiro, uno para cada uno de los cinco satélites.

Para mostrar este resultado mostramos, en primer lugar, el efecto “time-delay” de Shapiro para diversos radiotransmisores situados en el ecuador terrestre, así como para diversos satélites. En concreto, en la *Fig.6.4* se muestra este efecto para una señal que emite un radiotransmisor localizado en la posición ecuatorial

correspondiente al eje OX del sistema ECEF y que se recibe por un conjunto de satélites geoestacionarios distribuidos en un rango de longitud que va desde $81^{\circ}W$ hasta $81^{\circ}E$ en este sistema de referencia. En la *Fig.6.5* la distribución de los satélites es la misma, pero esta vez el radiotransmisor está situado en la posición $81^{\circ}E$.

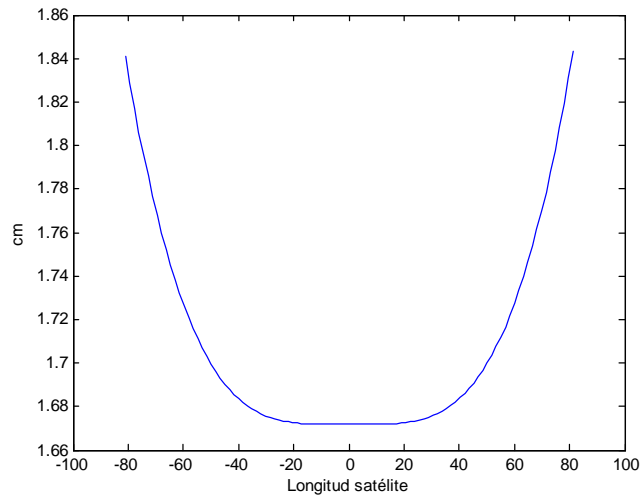


Fig.6.4

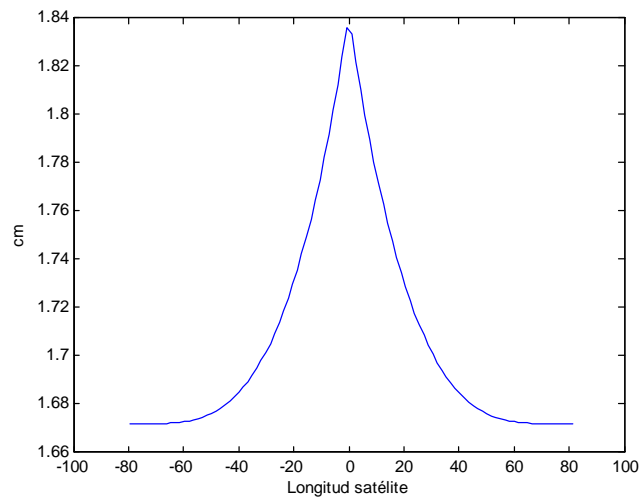


Fig.6.5

Las *Figs.6.6* y *6.7* corresponden a simulaciones en situaciones opuestas, es decir, en ellas se muestran las correcciones para radiotransmisores en posiciones ecuatoriales

cuyo rango va desde $81^{\circ}W$ hasta $81^{\circ}E$ con un sólo satélite geoestacionario, S , que recibe la señal, primero, en el eje OX del sistema ECEF (*Fig.6.6*) y después, a $81^{\circ}E$ (*Fig.6.7*);

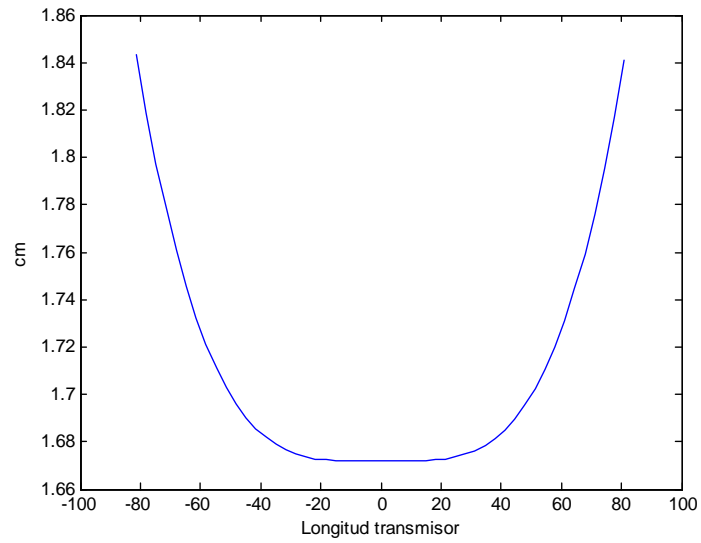


Fig.6.6

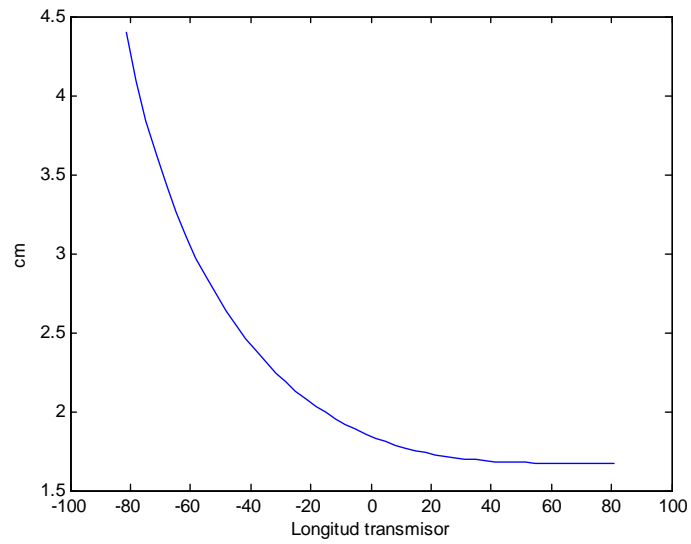


Fig.6.7

y, como se puede ver en estas figuras, este efecto no va mas allá de cinco centímetros. Pero vamos ahora a mostrar el resultado de diversas combinaciones de efectos para distintos satélites.

Así, en las *Figs. 6.8 – 6.22* se muestran los resultados de la Geolocalización cuando se utilizan tres satélites ecuatoriales, algunos de los cuales es geoestacionario en algún caso. En particular, en las *Figs. 6.8 – 6.10* los radiotransmisores están situados a lo largo del Ecuador desde $80^{\circ}W$ hasta $80^{\circ}E$ y los tres satélites, S_1 , S_2 y S_3 , son geoestacionarios. Las coordenadas respectivas de estos tres satélites en el sistema ECEF son: En la *Fig. 6.8*: $S_1(41972 \text{ km}, 60^{\circ}W, 0^{\circ})$; $S_2(41972 \text{ km}, 0^{\circ}, 0^{\circ})$ y $S_3(41972 \text{ km}, 60^{\circ}E, 0^{\circ})$; en la *Fig. 6.9*: $S_1(41972 \text{ km}, 75^{\circ}W, 0^{\circ})$; $S_2(41972 \text{ km}, 0^{\circ}, 0^{\circ})$ y $S_3(41972 \text{ km}, 75^{\circ}E, 0^{\circ})$ y en la *Fig. 6.10*: $S_1(41972 \text{ km}, 50^{\circ}W, 0^{\circ})$; $S_2(41972 \text{ km}, 0^{\circ}, 0^{\circ})$ y $S_3(41972 \text{ km}, 80^{\circ}E, 0^{\circ})$.

En estas figuras, y de acuerdo con las fórmulas clásica y postnewtoniana obtenidas, las diferencias de localización espacial para los correspondientes tiempos de emisión se muestran en las gráficas que están en la parte izquierda de cada una de ellas y las diferencias de tiempos de emisión para el satélite que, en cada caso, se especifica se muestran en la parte derecha, excepto en la *Fig. 6.8*, donde el gráfico de arriba a la izquierda corresponde a la diferencia de localizaciones espaciales y, los otros tres, a las diferencias de tiempos de emisión con que se determinan las localizaciones clásicas y postnewtonianas cuando esas diferencias de tiempos se refieren, primero (arriba a la derecha), al satélite S_1 ; segundo (abajo a la izquierda) al satélite S_2 y, tercero (abajo a la derecha) al satélite S_3 de acuerdo con las fórmulas (3.130)-(3.135).

En esta ocasión, es decir, en la *Fig. 6.8*, mostramos estos tres gráficos temporales a modo de ejemplo para que se puedan comparar las diferencias de tiempos de emisión correspondientes a cada uno de los tres satélites; pero como esta información es superabundante, en la mayoría de las ocasiones referiremos la diferencia de tiempos a uno cualquiera de los satélites. Por esta razón, en las otras dos figuras, es decir, en las figuras *Fig. 6.9* y *Fig. 6.10* sólo aparece una gráfica de diferencias de tiempos de emisión acompañando a las diferencias de localizaciones (que están

referidas, en la *Fig.6.9*, al satélite S_3 , y, en la *Fig.6.10*, al satélite S_1);

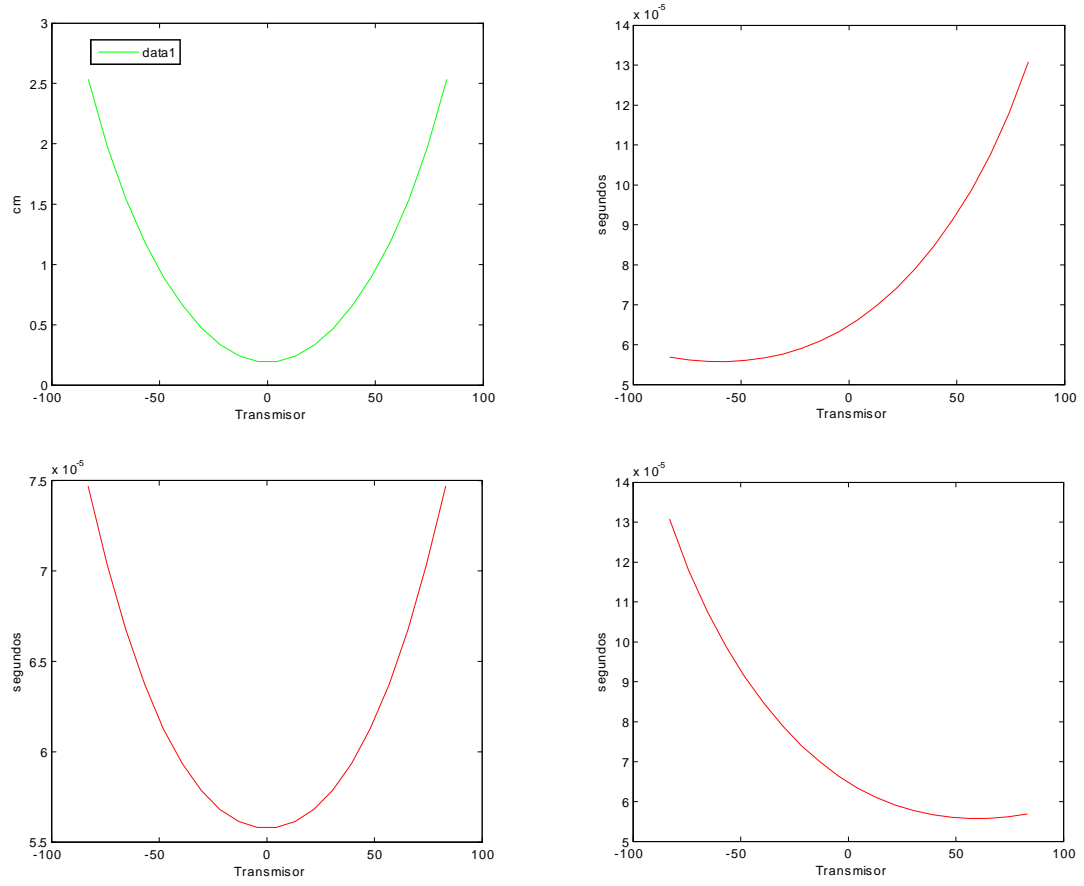


Fig.6.8

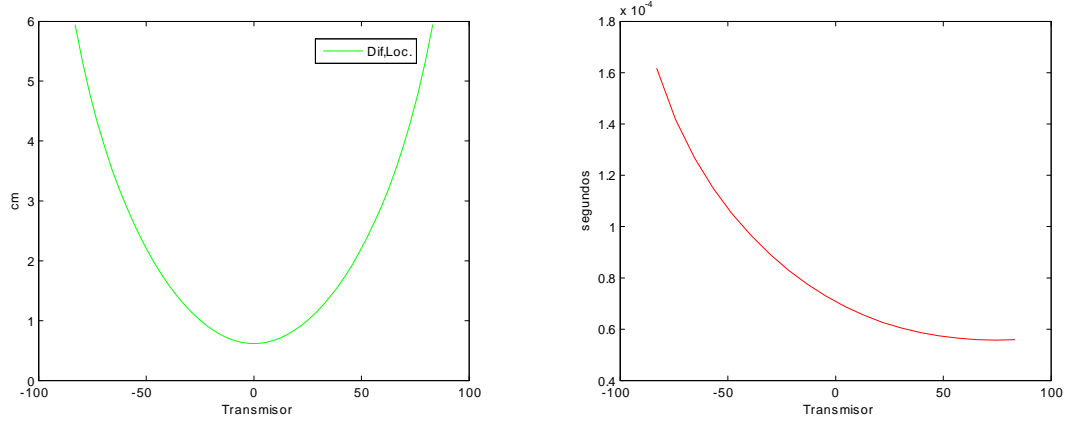


Fig.6.9

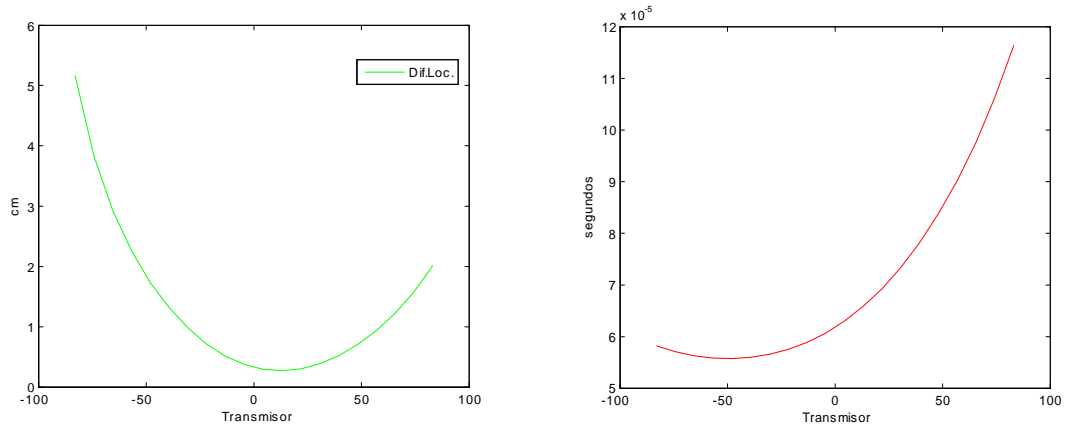


Fig.6.10

y como se puede ver en estas figuras, la acción combinada del efecto Shapiro para estos satélites da lugar a correcciones postnewtonianas de las correspondientes localizaciones clásicas que no son realmente importantes, ya que no llegan a alcanzar los 10 cm.

A continuación, en las *Figs. 6.11 – 6.13* mostramos simulaciones análogas a la que se muestra en la *Fig.6.3*, pero en estos casos algunos satélites ya no son

geoestacionarios. De hecho las coordenadas de los satélites en los instantes de recepción de la señal son: en la *Fig.6.11*: $S_1(8999 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(17992 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(8999 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$; en la *Fig.6.12*: $S_1(8999 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(29982 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(8999 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$ y en la *Fig.6.13*: $S_1(41972 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(41972 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(8999 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$.

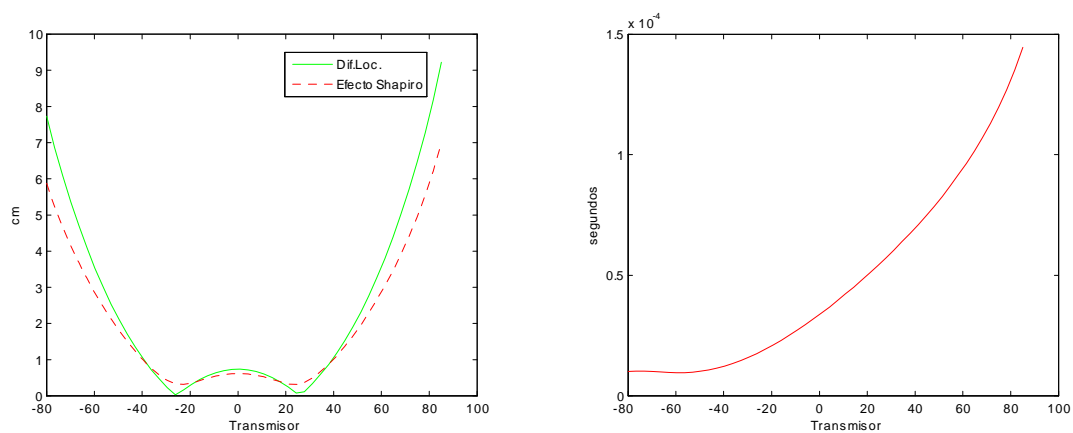


Fig.6.11

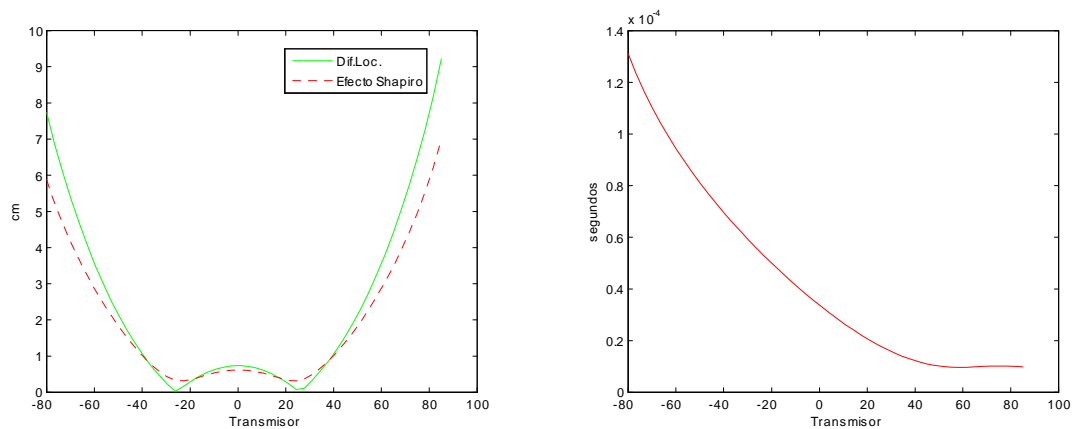


Fig.6.12

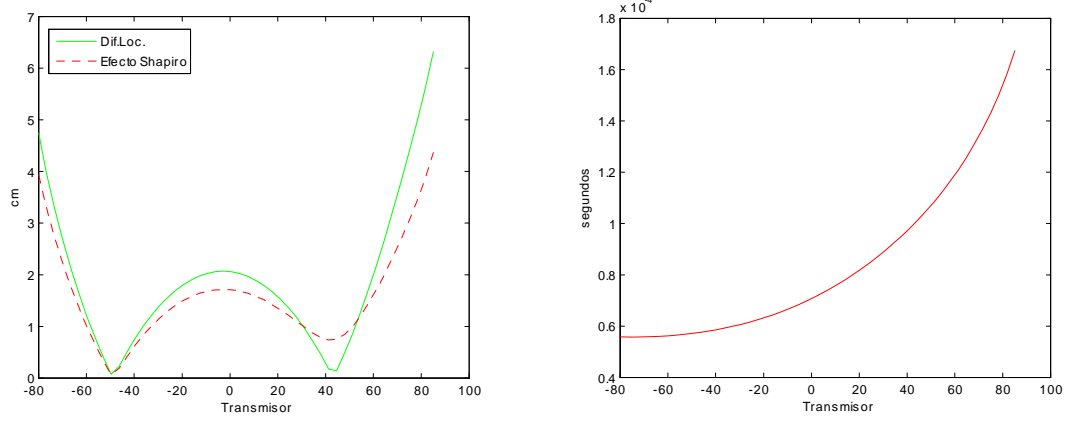


Fig.6.13

Como se ve en estas figuras, el patrón correspondiente a la combinación de efectos “time-delay” de Shapiro es muy diferente al correspondiente al caso en que todos los satélites son geoestacionarios. Así, cuando estos satélites están a menores, y diferentes, distancias desde el centro de la Tierra que la distancia geoestacionaria aparecen unos abultamientos centrales, es decir, en la dirección del satélite S_2 , en las gráficas de las localizaciones espaciales. En la Fig.6.11 las diferencias de los tiempos de emisión están referidas al satélite S_1 ; en la Fig.6.12 están referidas al satélite S_3 , y en la Fig.6.13 las diferencias nuevamente se refieren al satélite S_1 (en estas tres figuras se ve también que los cálculos numéricos -en línea continua- se aproximan muy bien a los resultados teóricos - en línea de puntos).

A continuación mostramos las simulaciones correspondientes a radiotransmisores que están sobre el ecuador terrestre con satélites que están en las posiciones ecuatoriales siguientes cuando reciben la señal: en la Fig.6.14: $S_1(41972 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(23987 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(41972 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$; en la Fig.6.15: $S_1(41972 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(17992 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(41972 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$; en la Fig.6.16: $S_1(41972 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(8999 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(41972 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$; en la Fig.6.17: $S_1(29982 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(8999 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(29982 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$; en la Fig.6.18: $S_1(17992 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(8999 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(17992 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$; en la Fig.6.19: $S_1(8999 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(8999 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(8999 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$; en la Fig.6.20: $S_1(8999 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(41972 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(8999 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$; en la Fig.6.21: $S_1(17992 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(41972 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(8999 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$; y en la Fig.6.22: $S_1(29982 \text{ km}, 75^\circ W, 0^\circ)$; $S_2(41972 \text{ km}, 0^\circ, 0^\circ)$ y $S_3(8999 \text{ km}, 75^\circ E, 0^\circ)$.

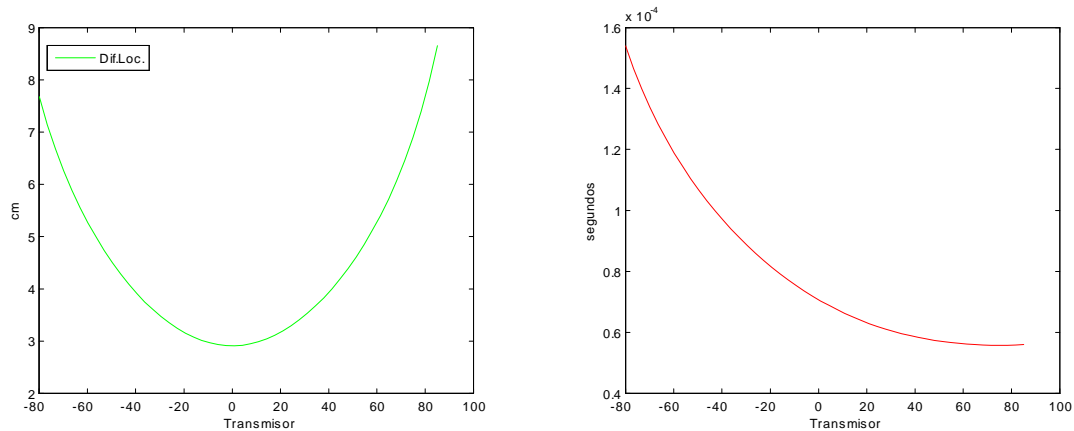


Fig.6.14

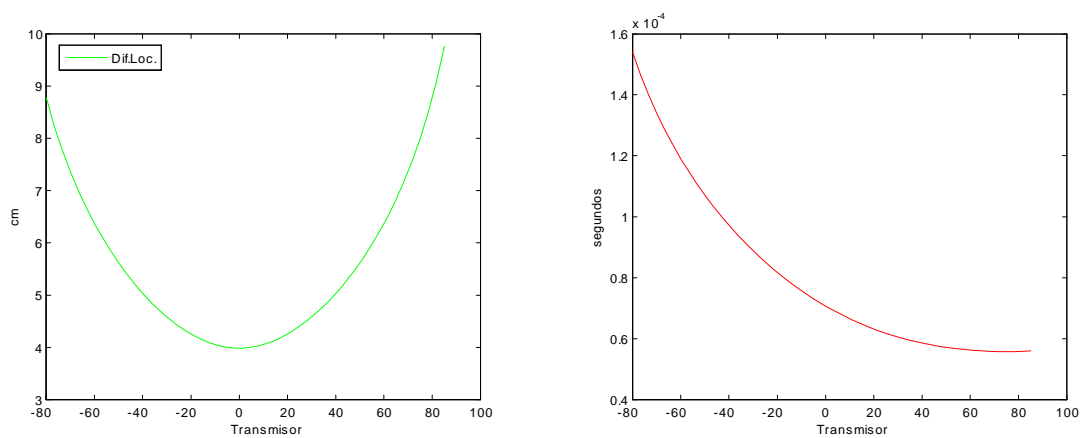


Fig.6.15

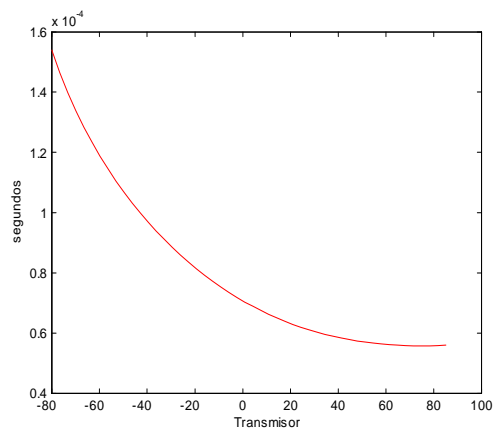
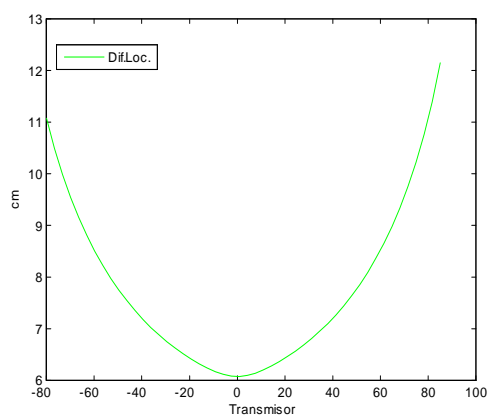


Fig.6.16

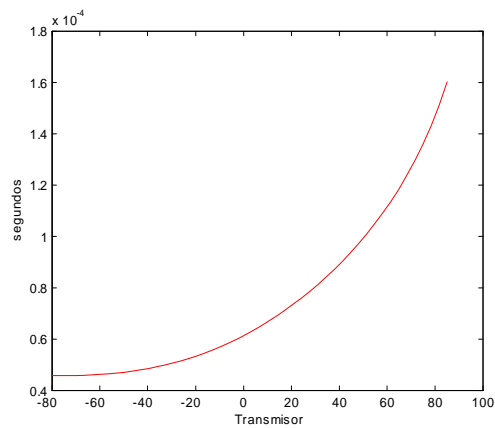
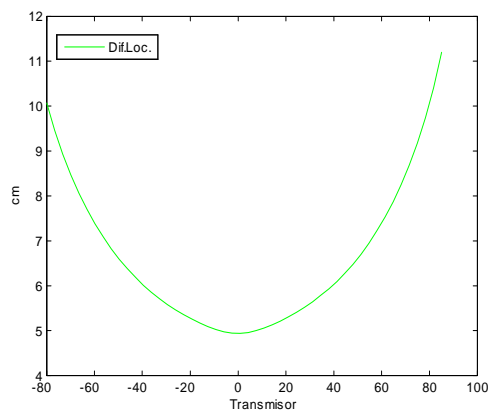


Fig.6.17

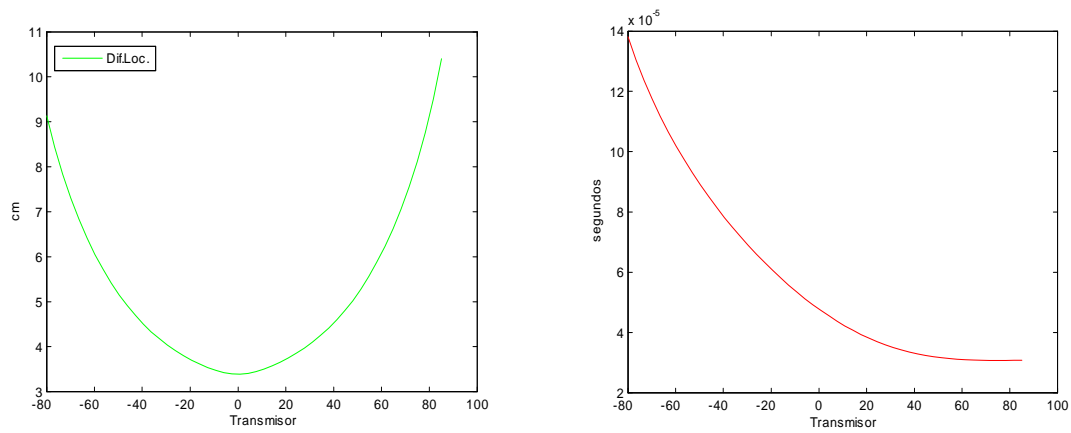


Fig.6.18

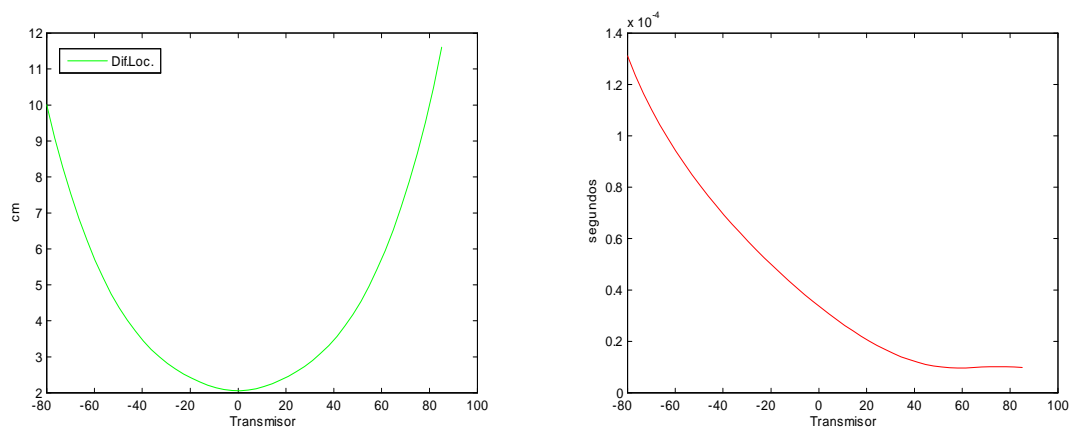


Fig.6.19

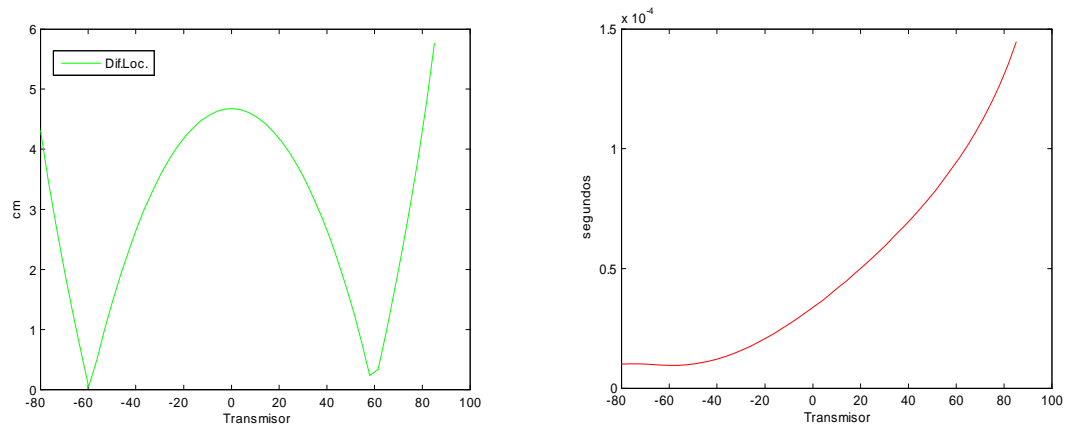


Fig.6.20

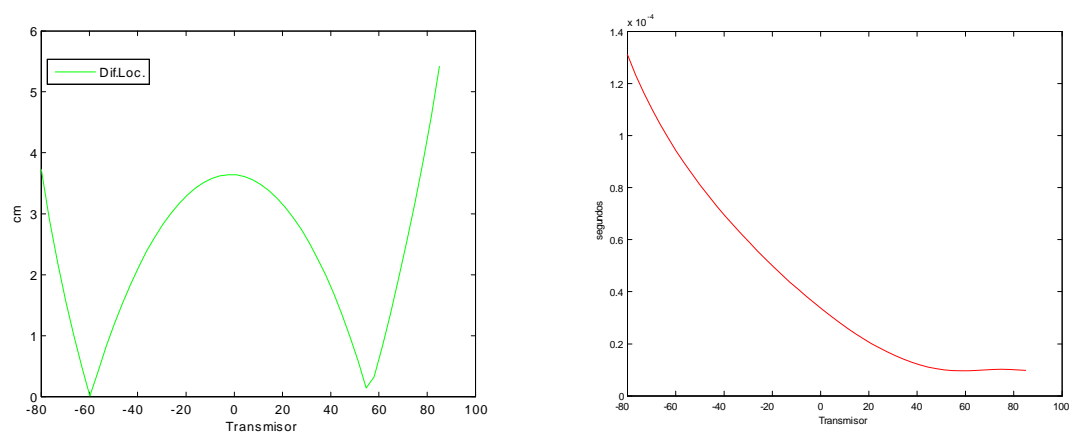


Fig.6.21

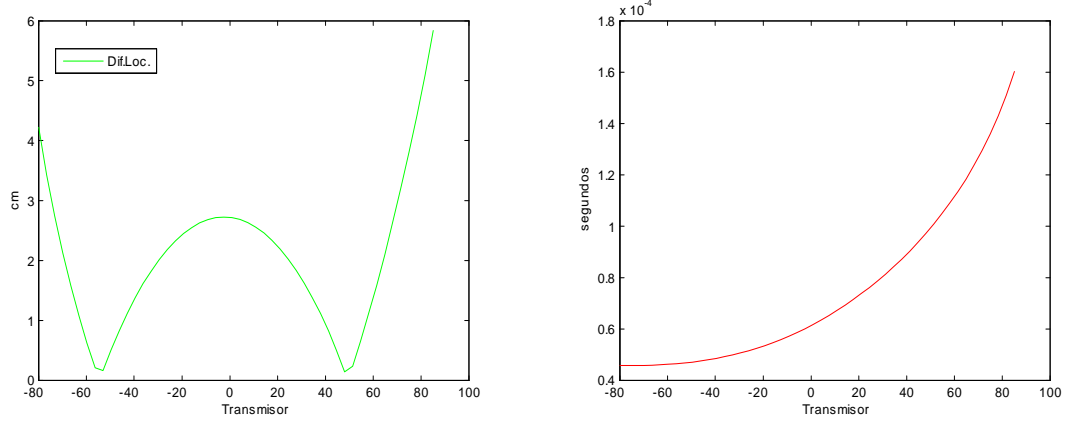


Fig.6.22

y nuevamente en estas figuras se ve que las combinaciones de efectos “time-delay” de Shapiro alcanzan magnitudes que son también pequeñas. De hecho, son del mismo orden que las magnitudes correspondientes a los casos de satélites geoestacionarios (aquí hay que tener en cuenta que las diferencias de los tiempos de emisión que aparecen en las Figs.6.17, 6.20 y 6.22 están referidas al satélite S_1 , y en las Figs.6.14, 6.15, 6.16, 6.18, 6.19 y 6.21 están referidas al satélite S_3).

Sin embargo, los resultados cambian cuando se utilizan cinco satélites. De hecho, para esta caso la separación entre las localizaciones espaciales newtonianas y postnewtonianas puede llegar a ser significativas para las localizaciones de interés, como se puede ver a lo largo de la siguiente secuencia de simulaciones, donde se ha localizado un conjunto de radiotransmisores situados a lo largo del ecuador terrestre. En las siguientes figuras las coordenadas de los satélites corresponden a los instantes de recepción de la señal. Así, en la Fig.6.23 las coordenadas de los satélites son: $S_1(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la Fig.6.24 las coordenadas de los satélites son: $S_1(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la Fig.6.25 las coordenadas de los satélites son: $S_1(35977 \text{ km}, 0, 9^\circ E, 80^\circ S)$; $S_2(8999 \text{ km}, 0, 9^\circ W, 62^\circ S)$; $S_3(35977 \text{ km}, 0, 9^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(8999 \text{ km}, 0, 9^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(35977 \text{ km}, 0, 9^\circ E, 80^\circ N)$; en la Fig.6.26 las coordenadas de los satélites son: $S_1(35977 \text{ km}, 0, 9^\circ E, 80^\circ S)$; $S_2(8999 \text{ km}, 0, 9^\circ W, 62^\circ S)$; $S_3(35977 \text{ km}, 0, 9^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(8999 \text{ km}, 0, 9^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(35977 \text{ km}, 0, 9^\circ E, 80^\circ N)$; en la Fig.6.27 las coordenadas de los satélites son: $S_1(35977 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 80^\circ S)$; $S_2(8999$

$km, 0,1^{\circ}E, 70^{\circ}S$); $S_2(11996 km, 0,1^{\circ}W, 42^{\circ}S)$; $S_3(41972 km, 0,1^{\circ}E, 0^{\circ})$; $S_4(23987 km, 0,1^{\circ}W, 42^{\circ}N)$ y $S_5(11996 km, 0,1^{\circ}E, 70^{\circ}N)$;

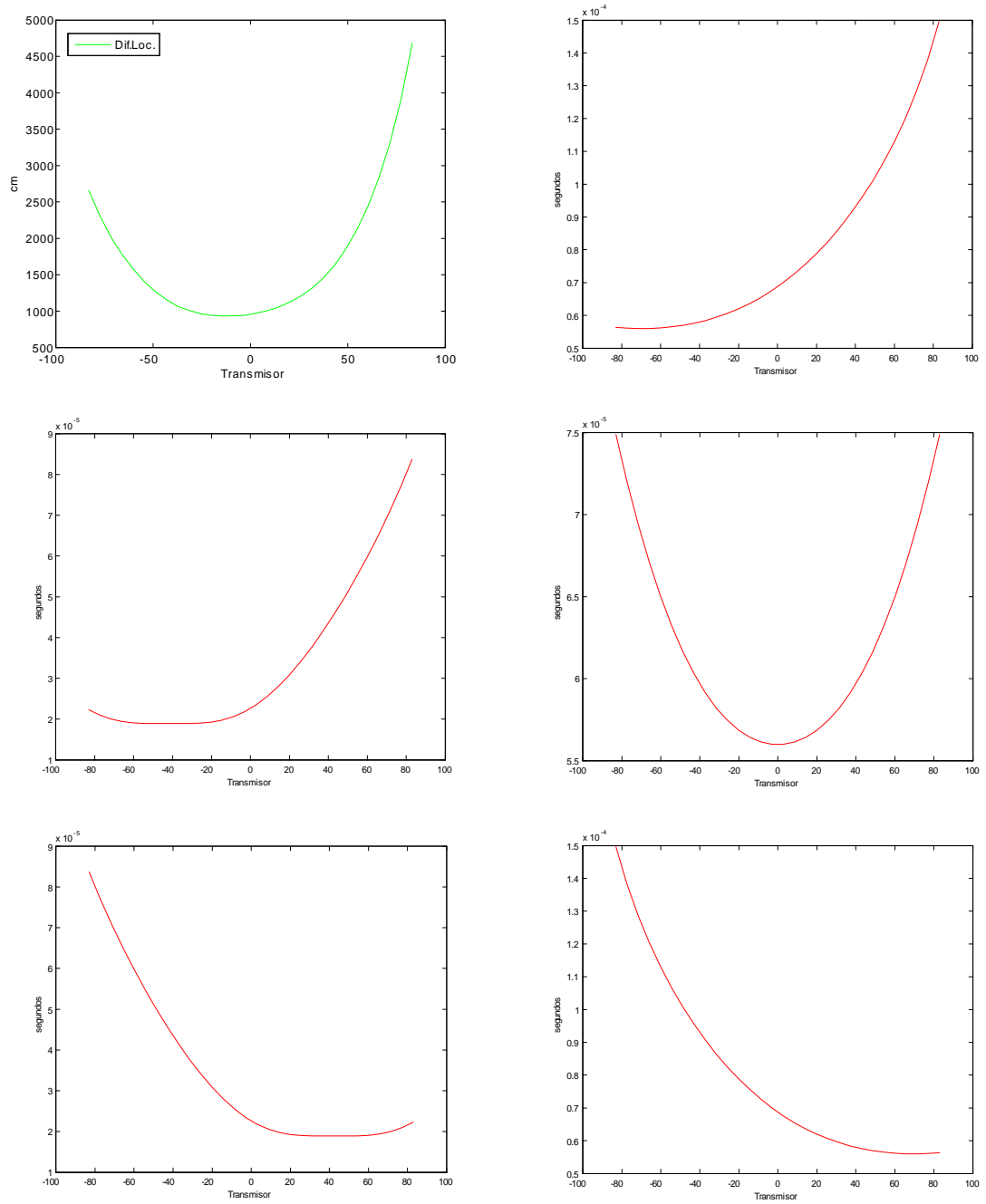


Fig.6.23

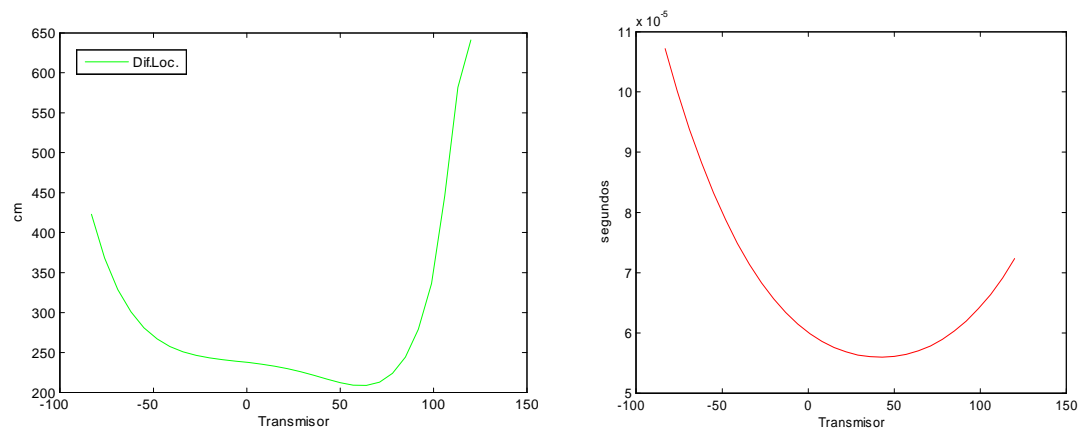


Fig.6.24

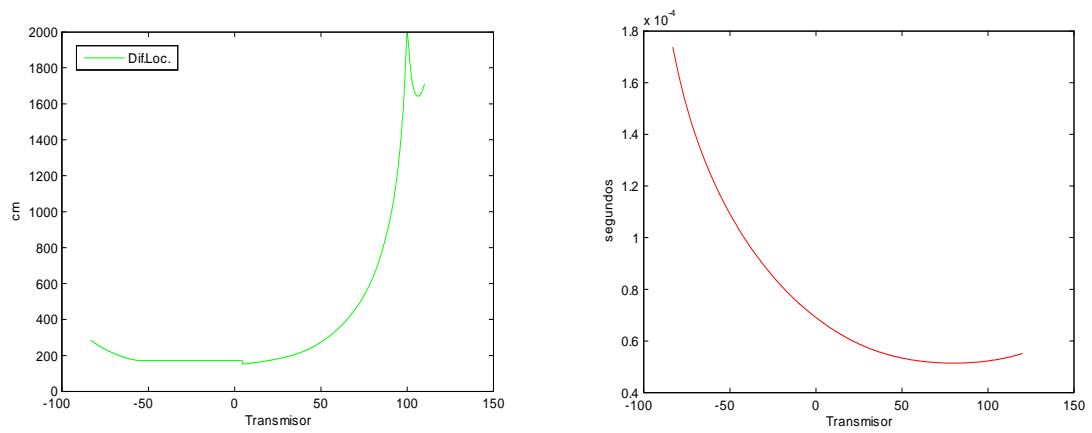


Fig.6.25

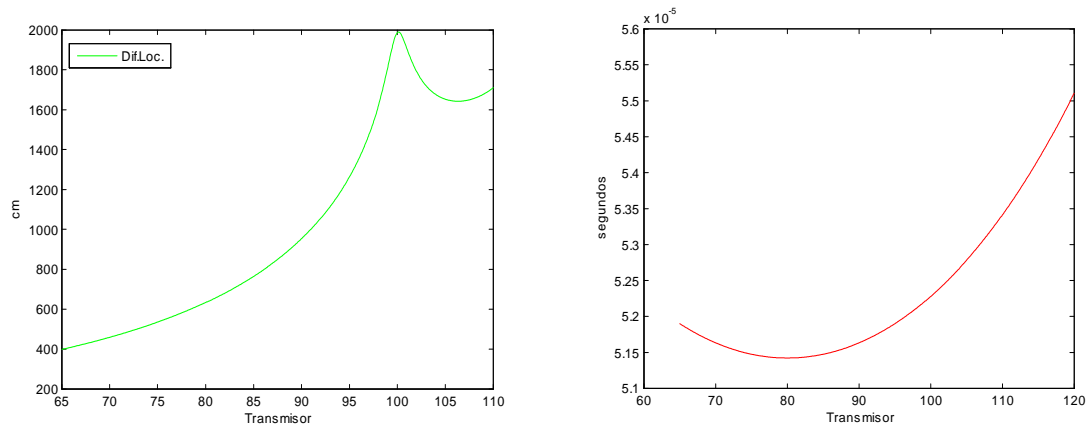


Fig.6.26

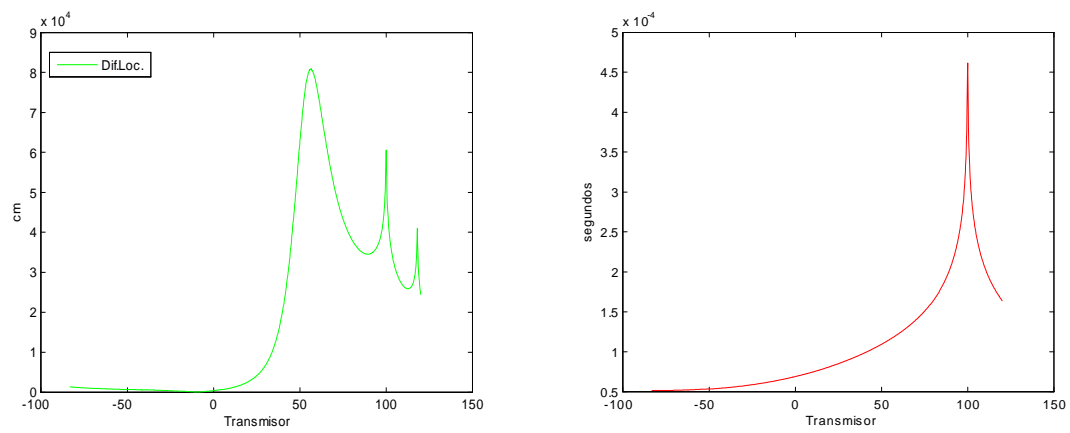


Fig.6.27

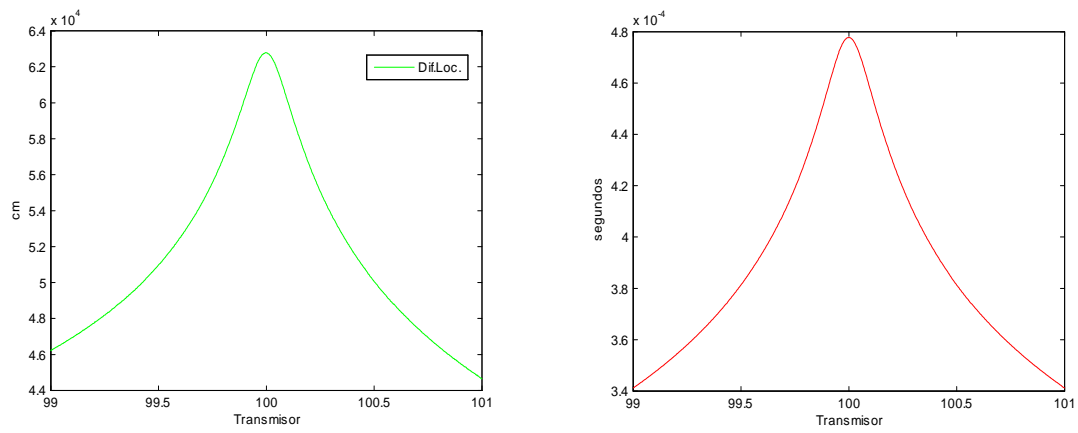


Fig.6.28

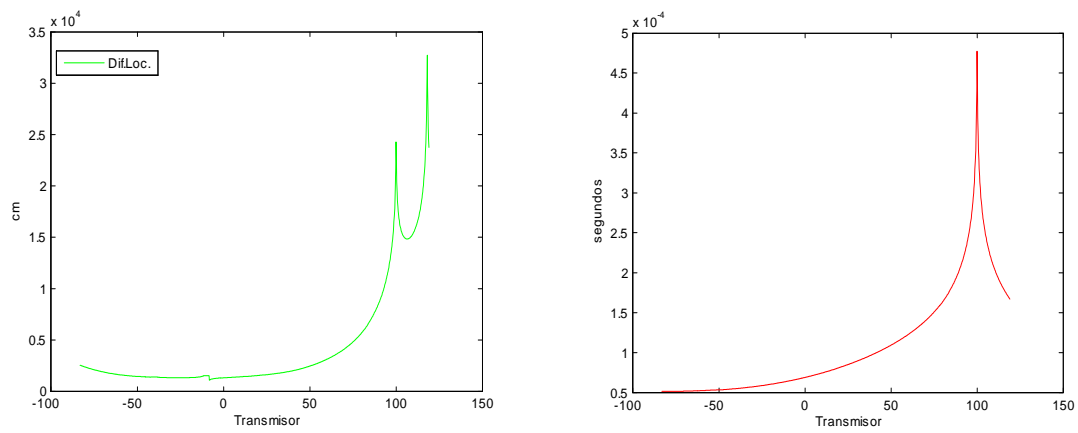


Fig.6.29

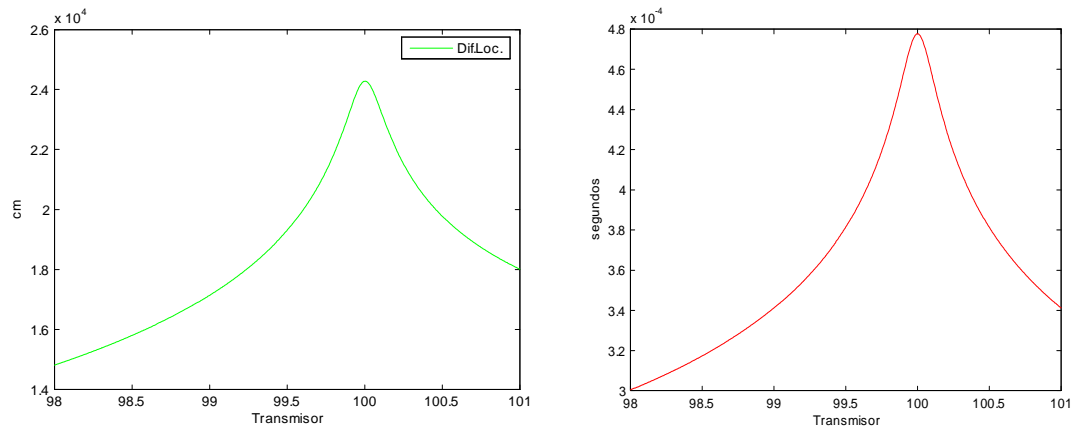


Fig.6.30

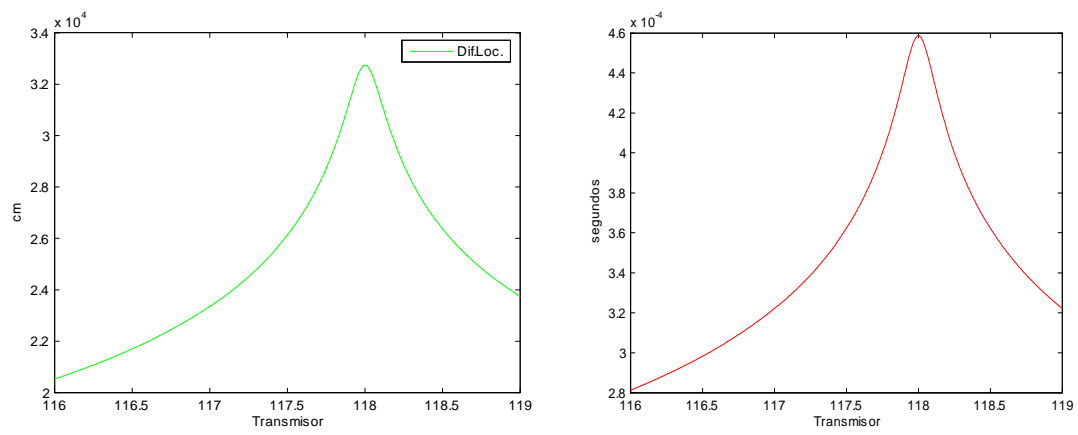


Fig.6.31

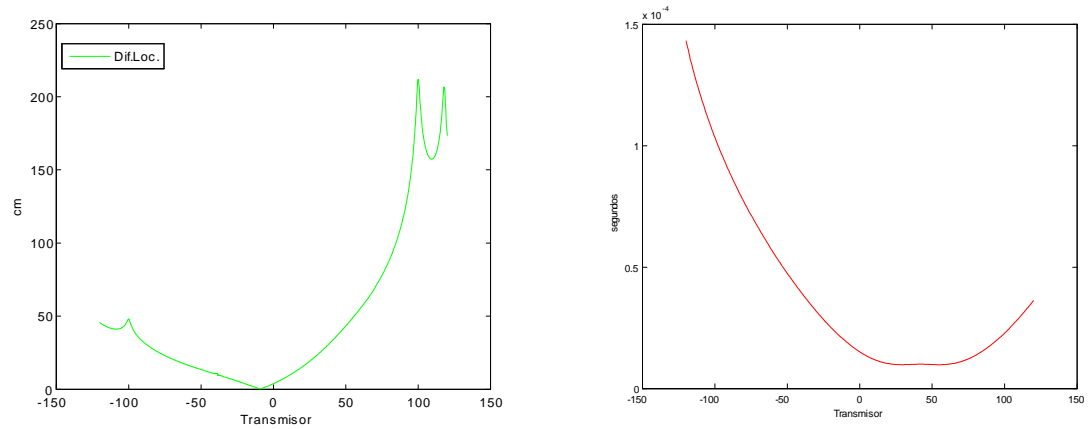


Fig.6.32

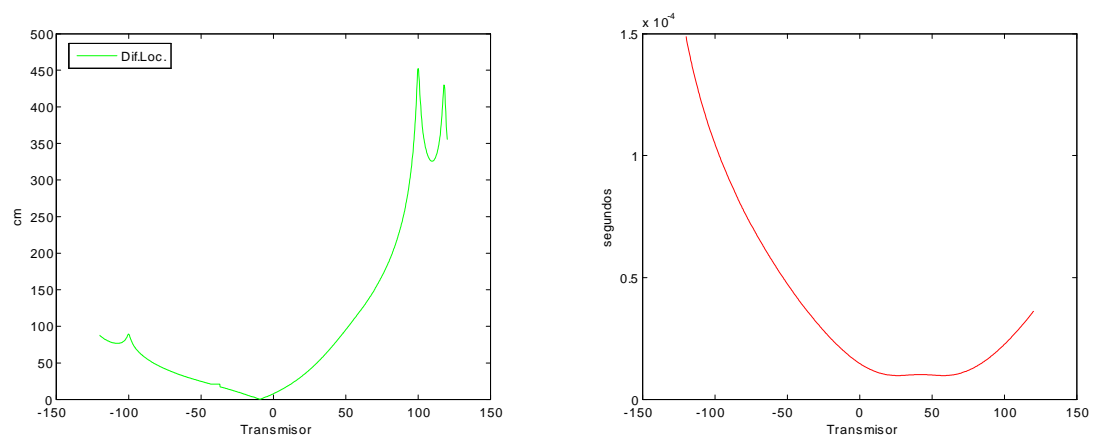


Fig.6.33

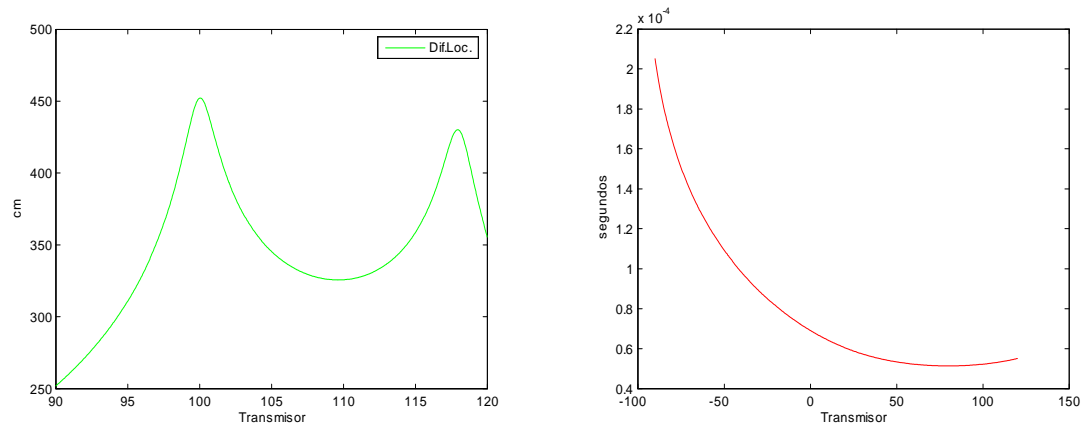


Fig.6.34

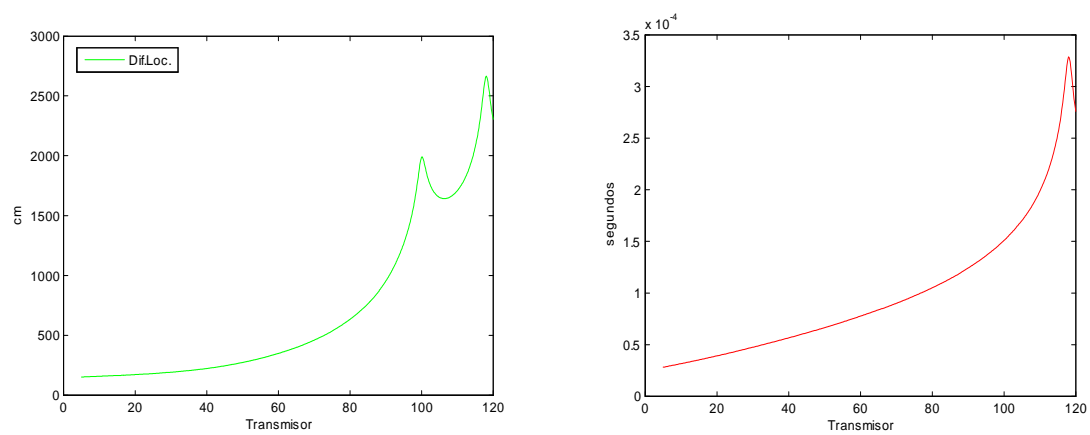


Fig.6.35

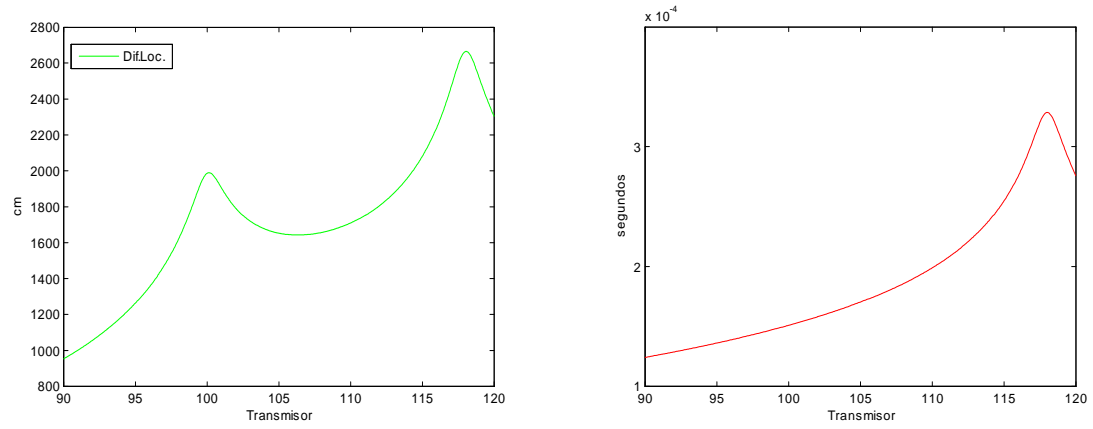


Fig.6.36

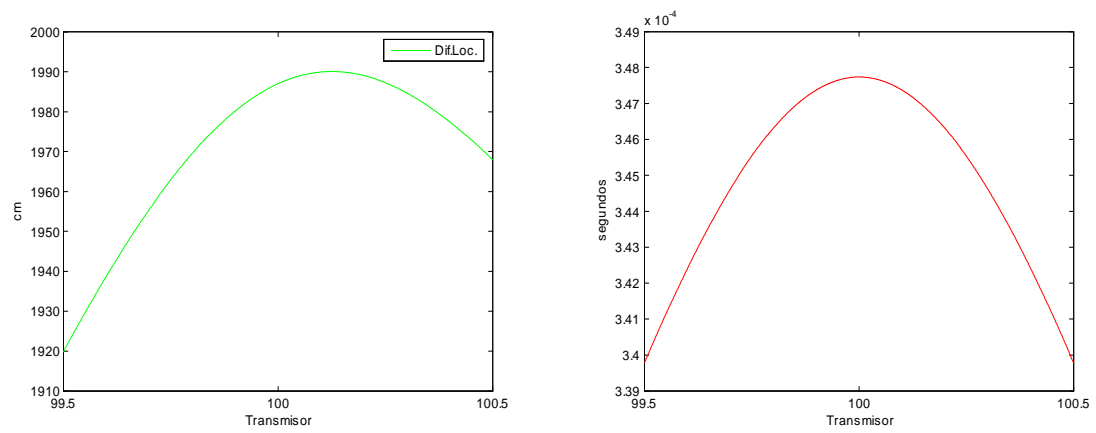


Fig.6.37

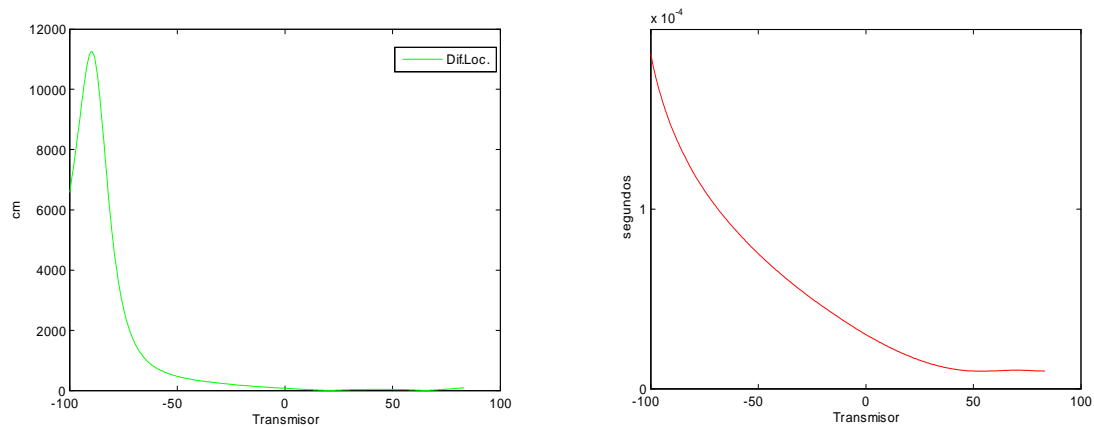


Fig.6.38

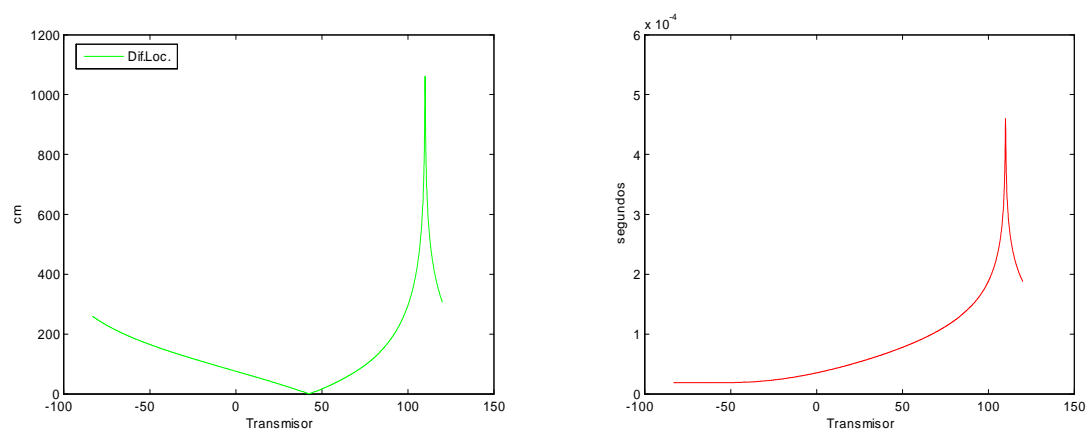


Fig.6.39

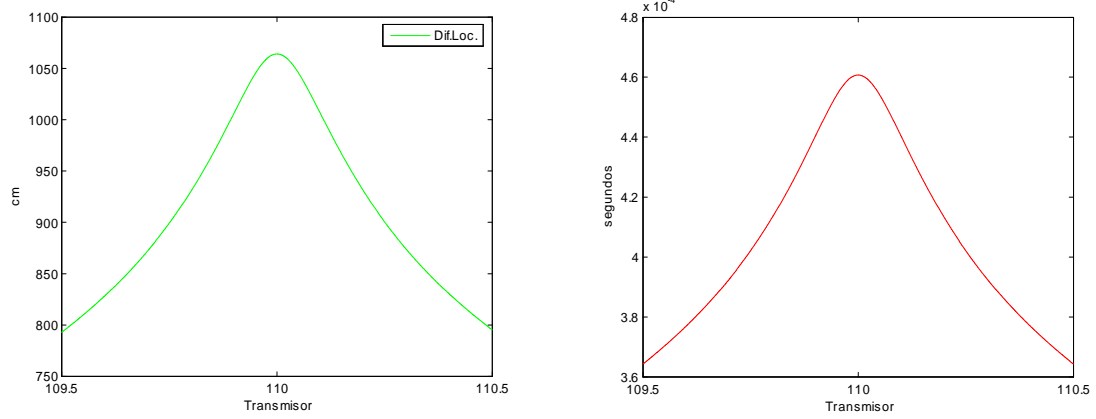


Fig.6.40

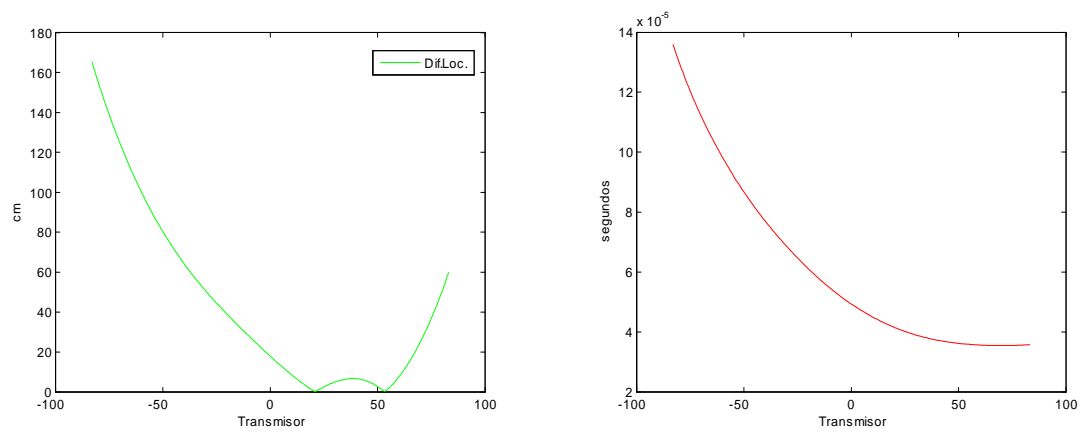


Fig.6.41

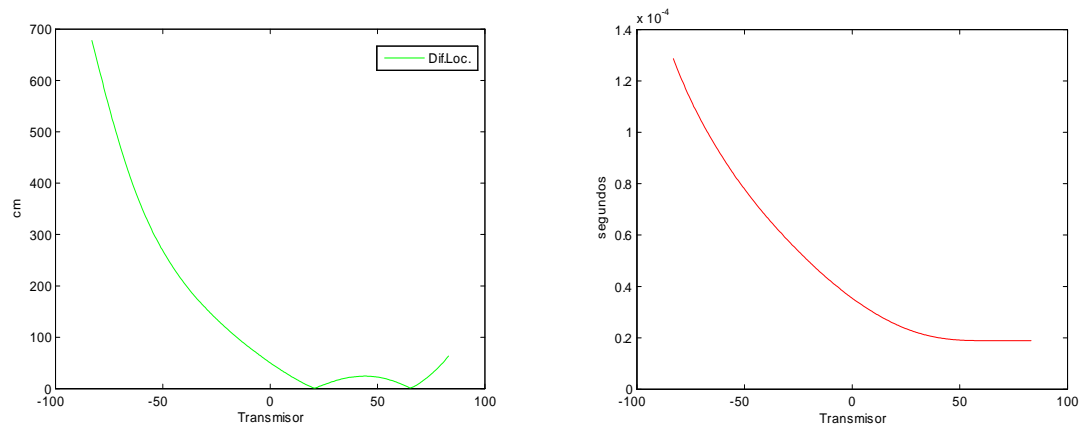


Fig. 6.42

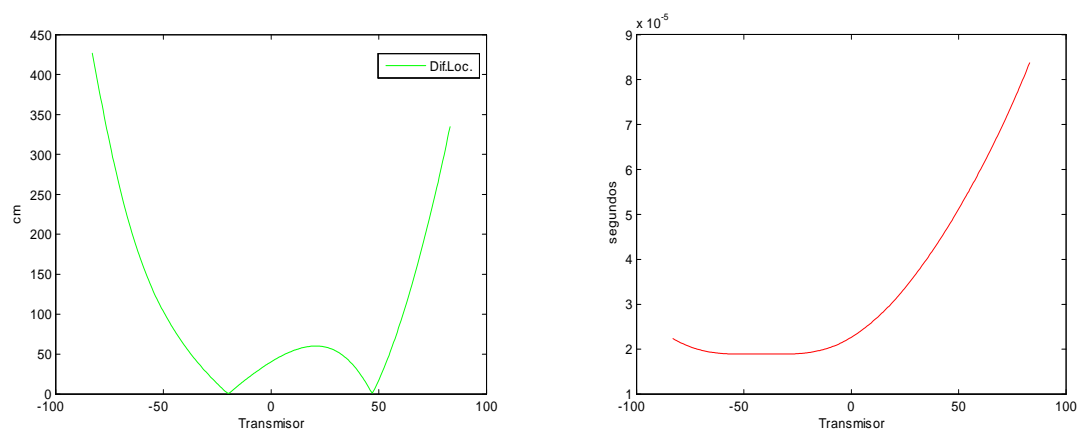


Fig. 6.43

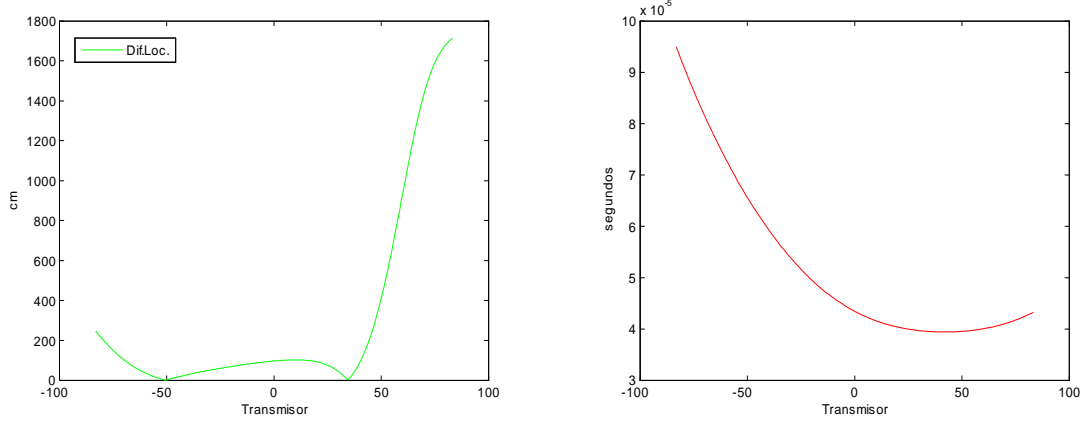


Fig. 6.44

y aquí podemos hacer la siguientes consideraciones: primera, excepto en los casos correspondientes a la *Fig. 6.23*, donde los satélites S_1 , S_3 y S_5 están a la distancia geoestacionaria, junto con el correspondiente a la *Fig. 6.24*, donde los satélites S_2 , S_3 y S_4 están a la distancia geoestacionaria, así como con los correspondientes a las *Figs. 6.38*, *6.41* y *6.42*, donde sólo los satélites S_3 y S_4 están a la distancia geoestacionaria y, finalmente, junto con los correspondientes a las *Figs. 6.39* y *6.40*, donde sólo el satélite S_3 está a la distancia geoestacionaria, los demás satélites están a diferentes distancias desde el centro de la Tierra. Así, como puede verse en esta secuencia, unos son satélites LEO; la gran mayoría son satélites MEO (del tipo GPS o Galileo) y algunos son HEO; segunda, las *Figs. 6.23* y *6.24* siguen el patrón típico mostrado en las *Figs. 6.14* – *6.19*, que son las que corresponden a simulaciones resueltas con el primer método. Naturalmente, es lógico que el patrón sea el mismo, porque en estas simulaciones están involucrados tres satélites a la distancia geoestacionaria. Pero se puede concluir, del hecho de que los satélites en las simulaciones de las *Figs. 6.23* y *6.24* tienen inclinaciones diferentes de cero, que las correcciones postnewtonianas son sensiblemente mayores que las que corresponden a los casos de satélites geoestacionarios. No obstante, la tendencia a crecer de estas correcciones cambia cuando los satélites están a distancias inferiores a la geoestacionaria y el radiotransmisor se empieza a alinear con alguno de los restantes satélites, como puede verse en la *Fig. 6.25*, donde se produce una conjunción con el quinto satélite. E incluso puede ocurrir que se presenten oscilaciones, como las que se ven en las *Figs. 6.27*, *6.29*, *6.32*, *6.33*, *6.35*, *6.38* y *6.39*. Pues bien, estos comportamientos se han estudiado con mucho detenimiento para descartar posibles

singularidades numéricas y, a continuación, mostramos el resultado de este estudio, primero, para la simulación correspondiente a la *Fig.6.25*, que está en la *Fig.6.26*; después, para la simulación de la *Fig.6.27*, que está en la *Fig.6.28*; a continuación, para la simulación correspondiente a la *Fig.6.29*, que están en las *Figs.6.30* y *6.31*; a continuación, para la simulación correspondiente a la *Fig.6.33*, que está en la *Fig.6.34*; a continuación, para la simulación correspondiente a la *Fig.6.35*, que están en las *Figs.6.36* y *6.37* y, finalmente, para la simulación correspondiente a la *Fig.6.39*, que está en la *Fig.6.40*. Conviene también observar en la *Fig.6.38*, donde las posiciones de los satélites sólo se diferencian de las de los que se usan en la *Fig.6.23* en las respectivas distancias al centro de la Tierra (que son, en el último caso, bastante mas pequeñas que en el primero), cómo se invierte la posición de la oscilación respecto de las que aparecen en las *Figs.6.25*, *6.27*, *6.29*, *6.32*, *6.33*, *6.35*, *6.38* y *6.39*. Finalmente, cabe destacar que el procedimiento con el que se generan los abultamientos que se muestran en las *Figs. 6.41 – 6.44* es el mismo que el que se utilizó para obtener las gráficas de las *Figs. 6.20 – 6.22*, aunque, igual que en los casos anteriores, las correcciones son también sensiblemente mayores. Además, como se muestra en las *Figs. 6.41* y *6.42*, resulta que cuanto mas lejos de la Tierra están los satélites que no están a distancia geoestacionaria (en estos casos, tres), se produce un abultamiento menor, y lo mismo ocurre cuando la diferencia entre dos configuraciones sólo consiste en que se ha modificado la distancia al centro de la Tierra de uno de los satélites, como se muestra en las *Figs. 6.43* y *6.44*, donde el satélite elegido para marcar esta diferencia es el satélite S_4 . Aquí hay que tener en cuenta que las diferencias de los tiempos de emisión en las *Figs.6.27 – 6.30*, así como en las *Figs.6.37*, *6.39* y *6.40*, están referidas al satélite S_1 ; que las diferencias de los tiempos de emisión en las *Figs.6.31*, *6.35*, *6.36* y *6.43* están referidas al satélite S_2 ; que las diferencias de los tiempos de emisión en las *Figs.6.24*, *6.32*, *6.32* y *6.44* están referidas al satélite S_4 y que las diferencias de los tiempos de emisión en las *Figs.6.25*, *6.26*, *6.34*, *6.38*, *6.41* y *6.42* están referidas al satélite S_5 . Además, igual que hicimos en un caso anterior (v. *Fig.6.8*) en la *Fig.6.23* aparecen las diferencias de los tiempos de emisión referidas a los cinco satélites. Así, para S_1 estas diferencias de tiempos aparecen arriba a la derecha; para S_2 aparecen en la segunda línea a la izquierda; para S_3 aparecen en la segunda línea a la derecha; para S_4 aparecen en la tercera línea a la izquierda y, para S_5 , aparecen en la tercera línea a la derecha.

A continuación se presentan simulaciones en las que se utilizan cinco satélites para localizar radiotransmisores que están en diferentes direcciones radiales respecto del centro de la Tierra. En todas ellas estos radiotransmisores están en el plano del ecuador terrestre, excepto en las dos últimas, donde las direcciones radiales tienen latitudes distintas de cero (nuevamente, las coordenadas de los satélites cor-

$20^{\circ}S$); $S_2(11996 \text{ km}, 0,1^{\circ}W, 42^{\circ}S)$; $S_3(11996 \text{ km}, 0,1^{\circ}E, 0^{\circ})$; $S_4(11996 \text{ km}, 0,1^{\circ}W, 42^{\circ}N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0,1^{\circ}E, 50^{\circ}N)$ y los radiotransmisores están situados en la longitud $60^{\circ}W$. Por su parte, en la *Fig. 6.58* las coordenadas de los satélites son: $S_1(41972 \text{ km}, 0,1^{\circ}E, 70^{\circ}S)$; $S_2(29982 \text{ km}, 0,1^{\circ}W, 42^{\circ}S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 0,1^{\circ}E, 0^{\circ})$; $S_4(11996 \text{ km}, 0,1^{\circ}W, 42^{\circ}N)$ y $S_5(35977 \text{ km}, 0,1^{\circ}E, 70^{\circ}N)$ y los radiotransmisores están situados en 0° de longitud y 5° de latitud Norte y, finalmente, en la *Fig. 6.59* las coordenadas de los satélites son: $S_1(41972 \text{ km}, 0,1^{\circ}E, 70^{\circ}S)$; $S_2(29982 \text{ km}, 0,1^{\circ}W, 42^{\circ}S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 0,1^{\circ}E, 0^{\circ})$; $S_4(11996 \text{ km}, 0,1^{\circ}W, 42^{\circ}N)$ y $S_5(35977 \text{ km}, 0,1^{\circ}E, 70^{\circ}N)$ y los radiotransmisores están situados en 0° de longitud y 15° de latitud Norte;

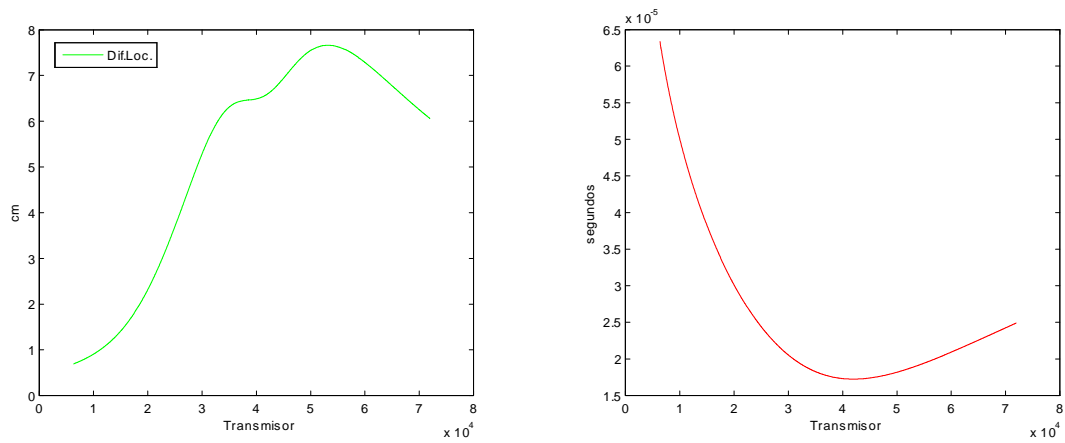


Fig. 6.45

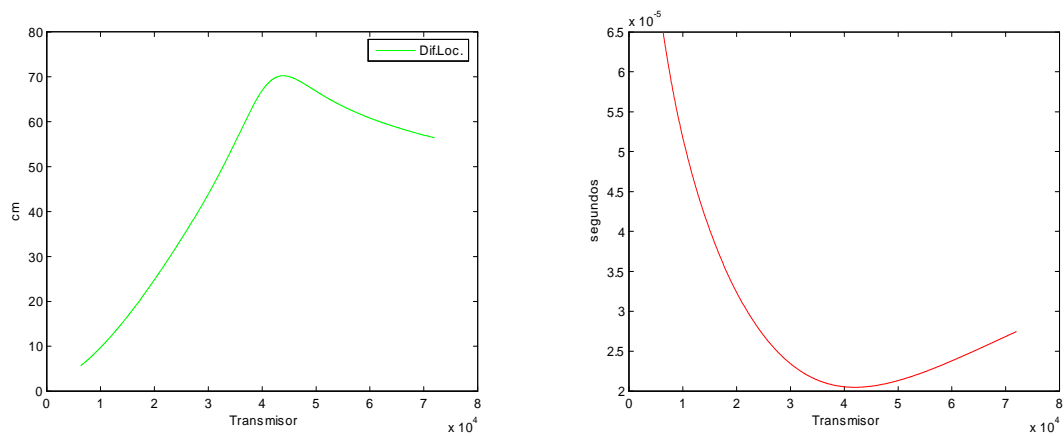


Fig. 6.46

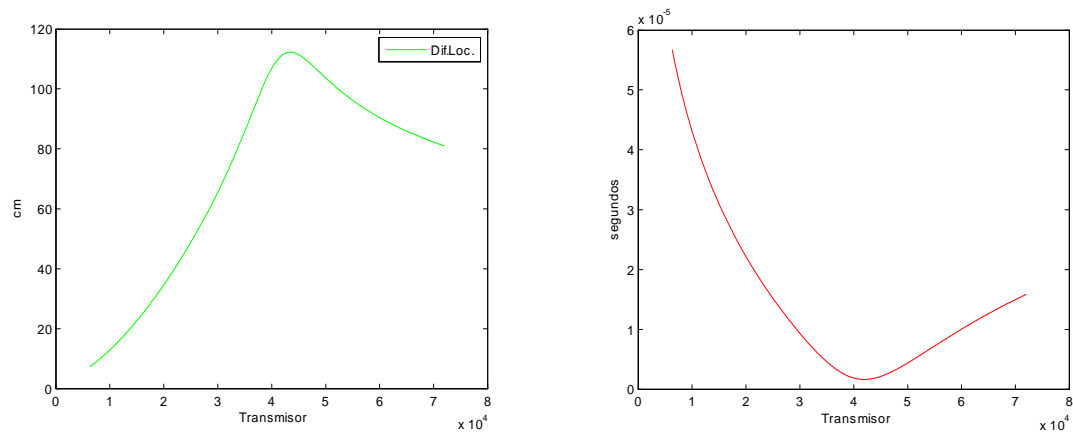


Fig. 6.47

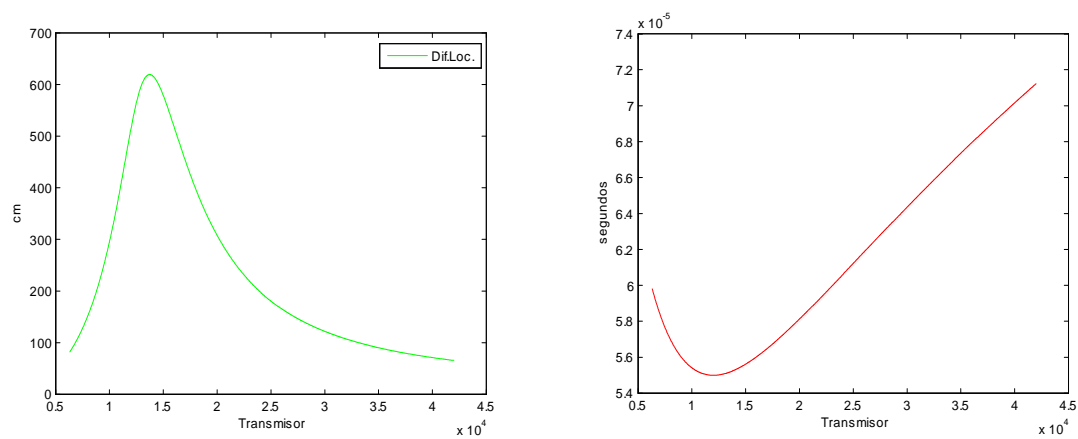


Fig. 6.48

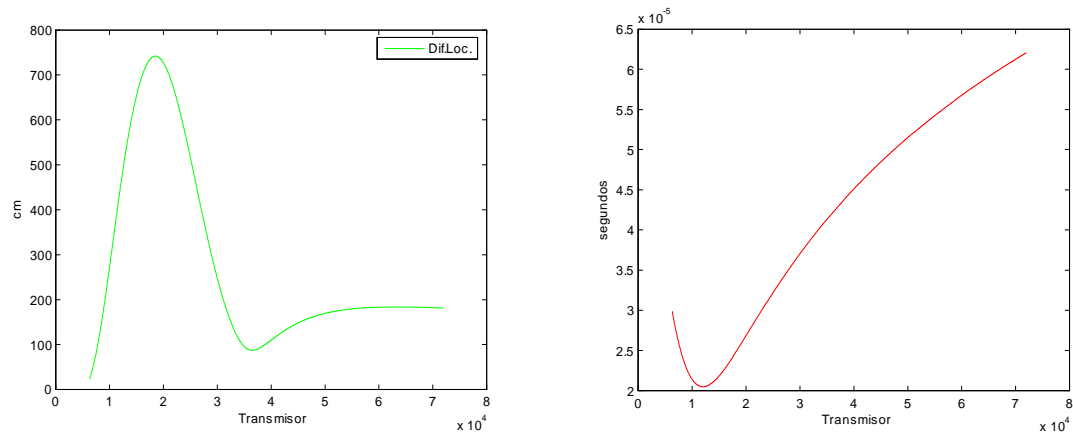


Fig. 6.49

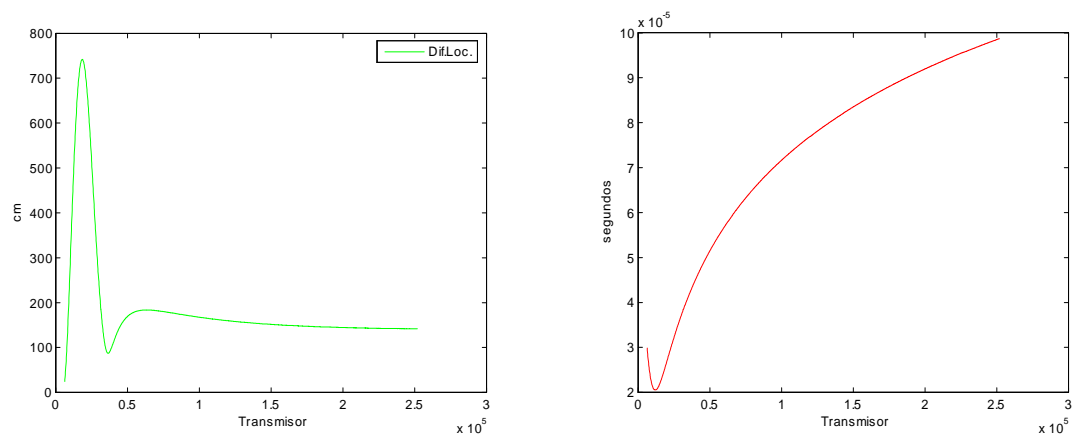


Fig. 6.50

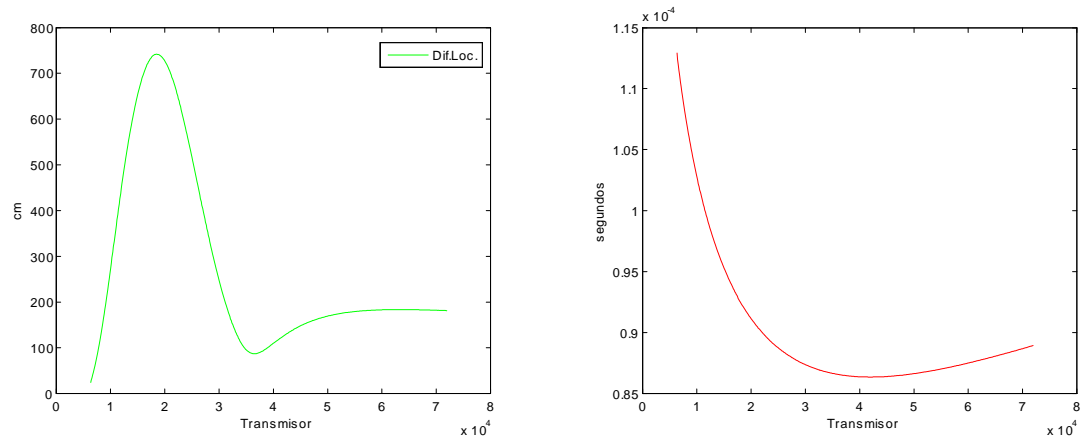


Fig. 6.51

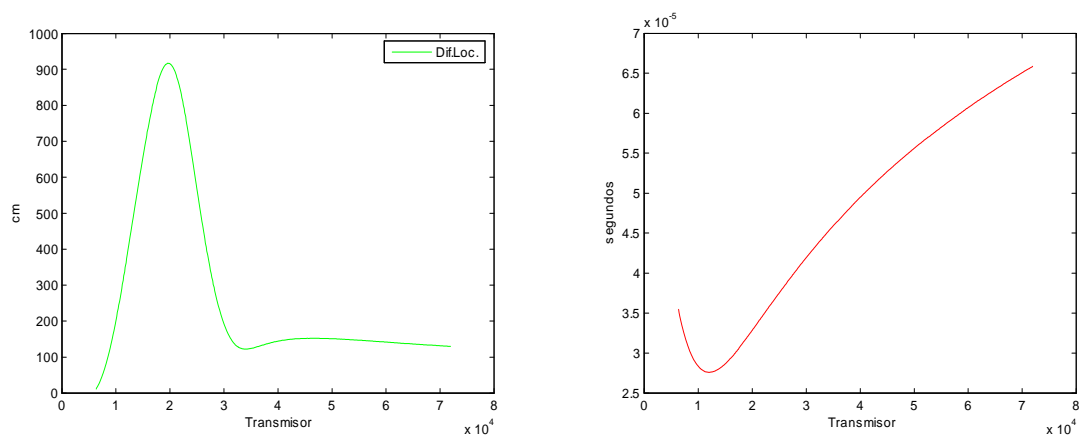


Fig. 6.52

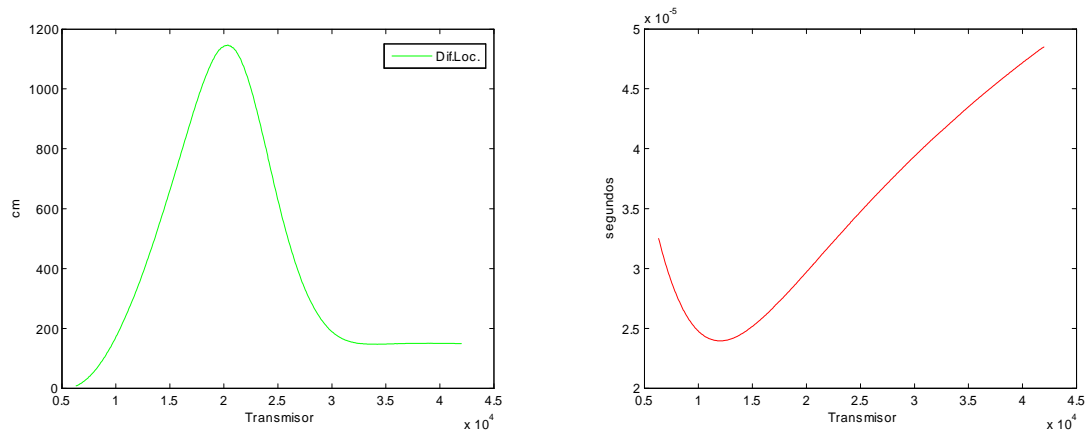


Fig. 6.53

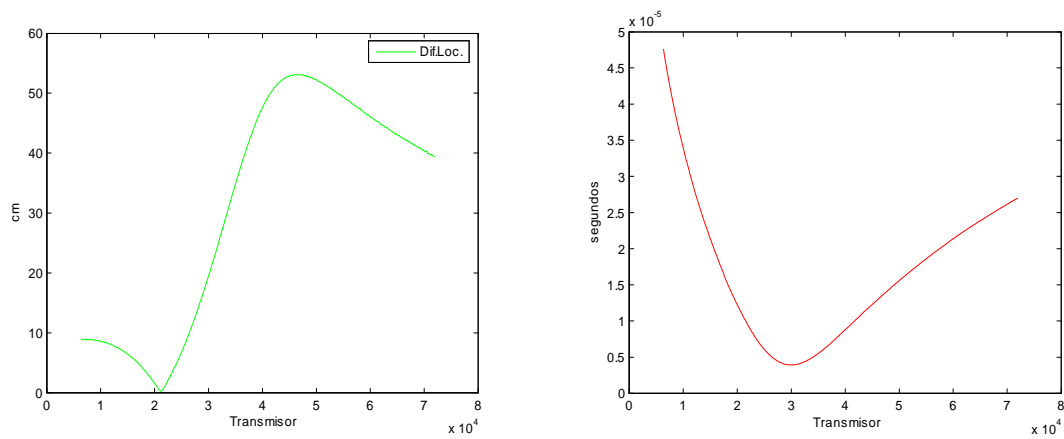


Fig. 6.54

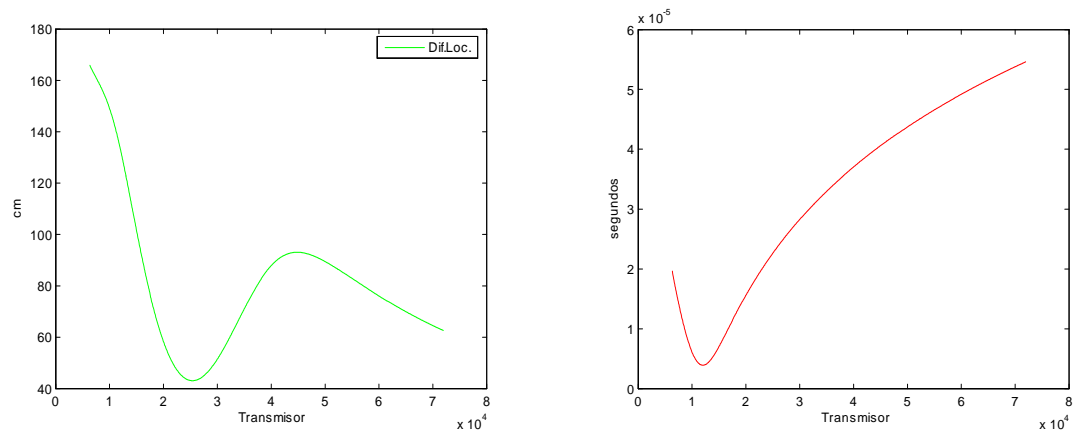


Fig. 6.55

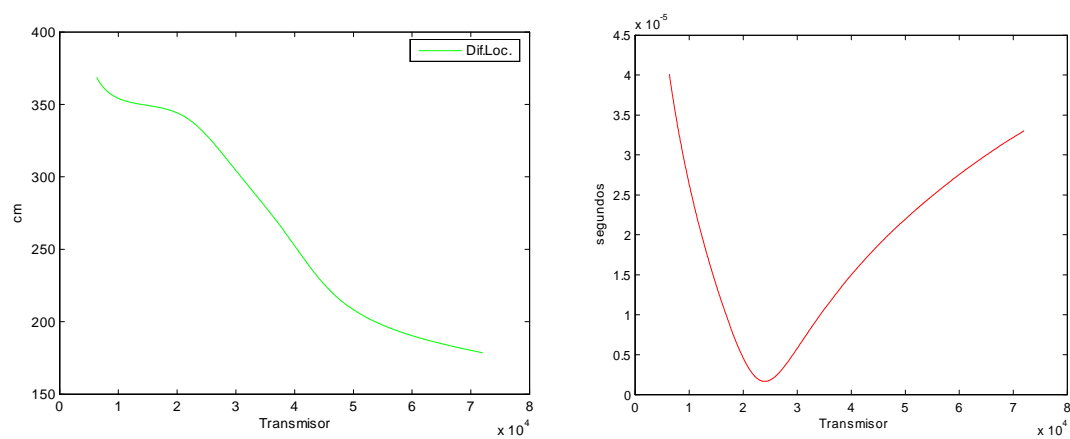


Fig. 6.56

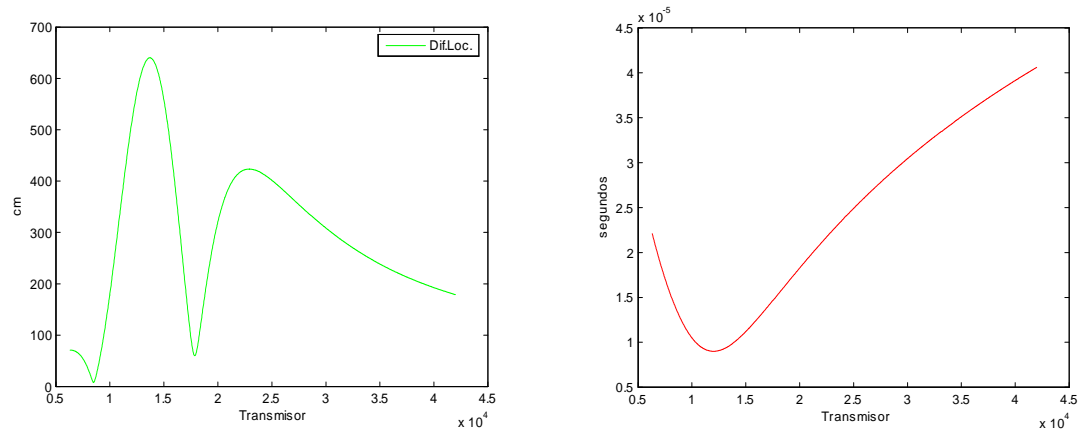


Fig. 6.57

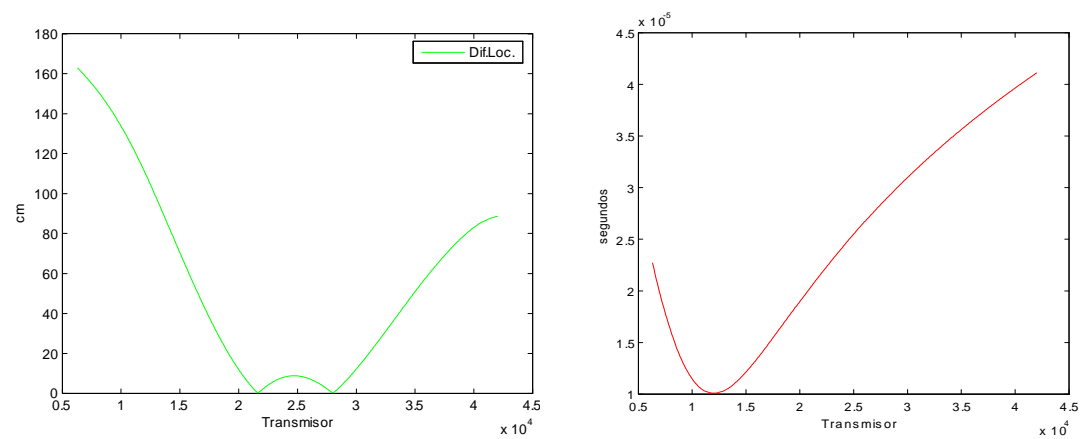


Fig. 6. 58

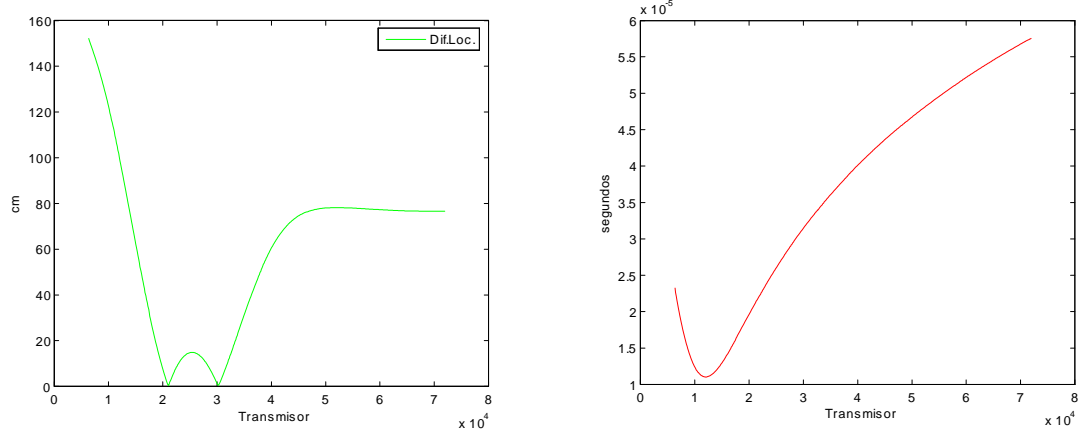


Fig. 6. 59

y, como se puede ver, todos los gráficos de las trece primeras figuras presentan similitudes significativas, al contrario de lo que ocurre con los dos últimos. Estas similitudes consisten en que aparecen incrementos paulatinos de las diferencias entre las localizaciones newtonianas y postnewtonianas; también, en que se alcanzan máximos en todas ellas y, finalmente, en que se producen decrecimientos paulatinos, aunque tanto los lugares donde se producen los máximos como las respectivas pendientes varían en función de las distribuciones de los satélites y de las direcciones radiales en que se localizan los radiotransmisores, como no puede ser de otra manera. Por esta razón es por la que hemos agrupado las figuras de manera que las transiciones entre las configuraciones de los satélites y las direcciones de los radiotransmisores aparezcan lo más continuas posible, como igualmente se hizo en las simulaciones anteriores. Así, en las tres primeras figuras (*Figs. 6.45 – 6.47*) la distribución de los satélites es la misma, de manera que, con sólo variar las direcciones de los radiotransmisores, aparecen incrementos sensibles en las correcciones postnewtonianas, aunque los valores máximos se alcanzan a distancias muy parecidas (entorno a 50.000 km desde el centro de la Tierra). Entre las cuatro siguientes figuras (*Figs. 6.48 – 6.51*) la diferencia esencial está en la dirección radial en que están los radiotransmisores, porque las coordenadas de los satélites sólo se diferencian en la latitud del satélite S_1 . Por esa razón estas figuras son también muy similares entre sí, pero diferentes de las tres anteriores porque los valores máximos de las correcciones ahora se alcanzan a distancias menores que las que corresponden a aquellas simulaciones. Y algo similar ocurre en la *Figs. 6.52 y 6.53*, donde se ha modificado sólo la latitud del satélite S_3 respecto de la que tenía en la *Fig. 6.51*.

Por lo que respecta a las *Figs.* 6.54 y 6.55 hay una diferencia entre las coordenadas radiales de S_4 , así como en la orientación de las respectivas direcciones de los radiotransmisores y, como se ve, la diferencia de correcciones postnewtonianas es francamente significativa.

Ahora parece interesante observar el comportamiento de estas correcciones en los dos siguientes casos, que son los que corresponden a las *Figs.* 6.56 y 6.57, donde hemos conseguido encontrar dos configuraciones de satélites que dan lugar a valores de las correcciones que se separan bastante del patrón estándar ya que, para la configuración que corresponde a la *Fig.* 6.56, las correcciones son siempre decrecientes a medida que aumenta la distancia de los radiotransmisores al centro de la Tierra y, para la configuración correspondiente a la *Fig.* 6.57, aparecen, no uno, sino dos máximos, una posibilidad que ya se apuntaba en la *Fig.* 6.50.

Por lo que respecta a las dos últimas de este grupo de quince figuras, tenemos nuevamente dos abultamientos que se producen, como en los casos que se analizaron anteriormente (*Figs.* 6.41 y 6.44) por una disminución importante de la coordenada radial, en estos casos, de uno de los satélites involucrados en las localizaciones, que ahora es el satélite S_4 .

Ahora, para completar esta descripción indicamos los satélites respecto de los cuales están referidas las diferencias de tiempos de emisión en cada una de las localizaciones. Así, las diferencias de los tiempos de emisión en las *Figs.* 6.49, 6.50 y 6.57 están referidas al satélite S_1 ; las diferencias de los tiempos de emisión en las *Figs.* 6.47 y 6.54 están referidas al satélite S_2 ; las diferencias de los tiempos de emisión en las *Figs.* 6.46, 6.52 y 6.53 están referidas al satélite S_3 ; las diferencias de los tiempos de emisión en las *Figs.* 6.48, 6.55, 6.56, 6.58 y 6.59 están referidas al satélite S_4 y las diferencias de los tiempos de emisión en las *Figs.* 6.45 y 6.51 están referidas al satélite S_5 (todas las diferencias de tiempos mencionadas para cinco satélites se han calculado con las fórmulas (5.24)-(5.30)).

De lo expuesto hasta ahora se puede deducir que hemos encontrado unos patrones de comportamiento de las correcciones postnewtonianas bastante representativos, aunque no podemos asegurar que no haya otros, dado que las correcciones que hemos estudiado se han limitado a simulaciones en que las variaciones de las coordenadas de los radiotransmisores son, aunque razonables, limitadas, como no puede ser de otra manera, ya que las funciones involucradas dependen de un número de variables independientes que es muy alto. De hecho, este número varía entre un mínimo de doce y un máximo de dieciocho, número que, como se ha indicado anteriormente, depende del método utilizado en las localizaciones. Por este motivo, hasta ahora hemos mostrado simulaciones que corresponden a radiotransmisores que estaban, primero, sobre el ecuador terrestre para poder aplicar el primer méto-

do y, después, en el espacio exterior, en direcciones radiales, que son posiciones en las cuales el segundo método ha resultado muy eficiente. Y ahora, para completar este estudio, mostramos los resultados que corresponden a variaciones de las coordenadas de los radiotransmisores cuando éstos están sobre dos superficies fundamentales, que son el plano ecuatorial terrestre y la superficie de la Tierra. Así, las figuras que van desde la *Fig. 6.60* hasta la *Fig. 6.67* corresponden a radiotransmisores que están sobre la parte visible del plano ecuatorial terrestre y las figuras *Fig. 6.68* - *Fig. 6.77* corresponden a radiotransmisores que están sobre la cara visible de la Tierra (visible, se entiende, desde los satélites).

En concreto, en los instantes de recepción de la señal las coordenadas de los satélites en la *Fig. 6.60* son: $S_1(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 1^\circ E, 5^\circ N)$; $S_4(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.61* las coordenadas de los satélites son: $S_1(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.62* las coordenadas de los satélites son: $S_1(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.63* las coordenadas de los satélites son: $S_1(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(11996 \text{ km}, 1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 50^\circ N)$; en la *Fig. 6.64* las coordenadas de los satélites son: $S_1(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(29982 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(35997 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.65* las coordenadas de los satélites son: $S_1(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(29982 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(35997 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.66* las coordenadas de los satélites son: $S_1(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(29982 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(35997 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.67* las coordenadas de los satélites son: $S_1(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 20^\circ S)$; $S_2(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 50^\circ N)$; en la *Fig. 6.68* las coordenadas de los satélites son: $S_1(8999 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(23989 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(20989 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0, 5^\circ)$; $S_4(32980 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.69* las coordenadas de los satélites son: $S_1(23989 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 10^\circ S)$; $S_2(26984 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 15^\circ S)$; $S_3(20989 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 10, 5^\circ)$; $S_4(32980 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(23989 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 20^\circ N)$; en la *Fig. 6.70* las coordenadas de los satélites son: $S_1(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.71* las coordenadas de los satélites son: $S_1(8999 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(8999 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 0, 5^\circ)$; $S_4(8999 \text{ km}, 0, 1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(11996 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.72* las coordenadas de los satélites son: $S_1(8999 \text{ km}, 0, 1^\circ E, 70^\circ S)$;

$S_2(26984 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(20989 \text{ km}, 0,1^\circ E, 0,5^\circ N)$; $S_4(32980 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(20989 \text{ km}, 0,1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.73* las coordenadas de los satélites son: $S_1(8999 \text{ km}, 0,1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(11996 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(8999 \text{ km}, 0,1^\circ E, 0,5^\circ N)$; $S_4(8999 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0,1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.74* las coordenadas de los satélites son: $S_1(20989 \text{ km}, 0,1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(26984 \text{ km}, 0,1^\circ W, 15^\circ S)$; $S_3(20989 \text{ km}, 0,1^\circ E, 10,5^\circ N)$; $S_4(32980 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(20989 \text{ km}, 0,1^\circ E, 20^\circ N)$; en la *Fig. 6.75* las coordenadas de los satélites son: $S_1(20989 \text{ km}, 0,1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(26984 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(20989 \text{ km}, 0,1^\circ E, 0,5^\circ N)$; $S_4(32980 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(20989 \text{ km}, 0,1^\circ E, 70^\circ N)$; en la *Fig. 6.76* las coordenadas de los satélites son: $S_1(11996 \text{ km}, 0,1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(11996 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 0,1^\circ E, 0^\circ)$; $S_4(11996 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(41972 \text{ km}, 0,1^\circ E, 70^\circ N)$; y en la *Fig. 6.77* las coordenadas de los satélites son: $S_1(41972 \text{ km}, 0,1^\circ E, 70^\circ S)$; $S_2(11996 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ S)$; $S_3(41972 \text{ km}, 0,1^\circ E, 0,5^\circ N)$; $S_4(11996 \text{ km}, 0,1^\circ W, 42^\circ N)$ y $S_5(11996 \text{ km}, 0,1^\circ E, 70^\circ N)$.

Por último, igual que en la figuras anteriores en la parte derecha de cada figura aparecen las diferencias de tiempos de emisión para el satélite que se especifica. Así, en las figuras *Fig. 6.60*, *6.65*, *6.68*, *6.71*, *6.73*, *6.74*, *6.76* y *6.77* las diferencias de los tiempos de emisión están referidas al satélite S_1 ; en las figuras *Fig. 6.67*, *6.69*, *6.70*, *6.72* y *6.75* las diferencias están referidas al satélite S_2 ; en las figuras *Fig. 6.61* y *6.66* las diferencias están referidas al satélite S_3 ; en la figura *Fig. 6.64* las diferencias están referidas al satélite S_4 y en las figuras *Fig. 6.62* y *6.63* las diferencias están referidas al satélite S_5 ;

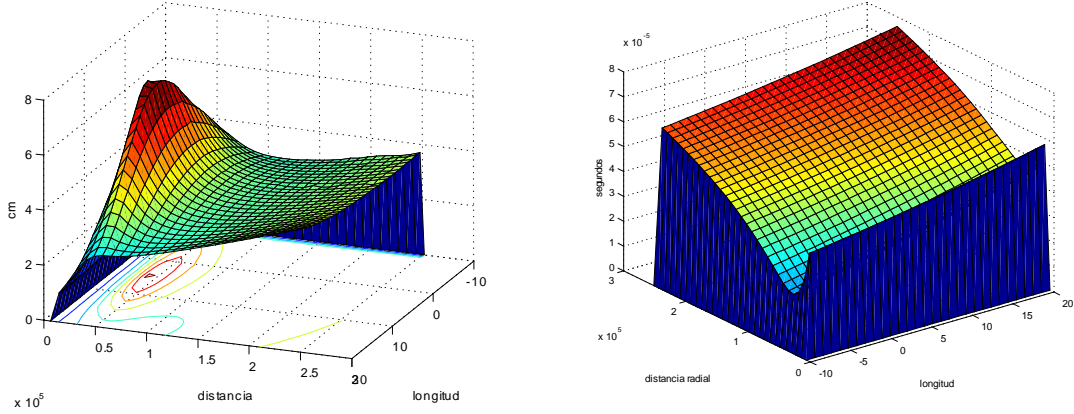


Fig. 6.60

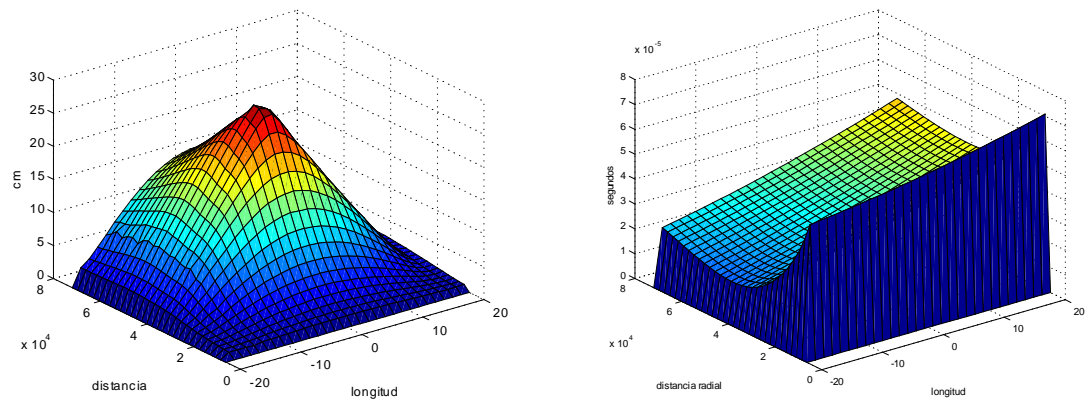


Fig. 6.61

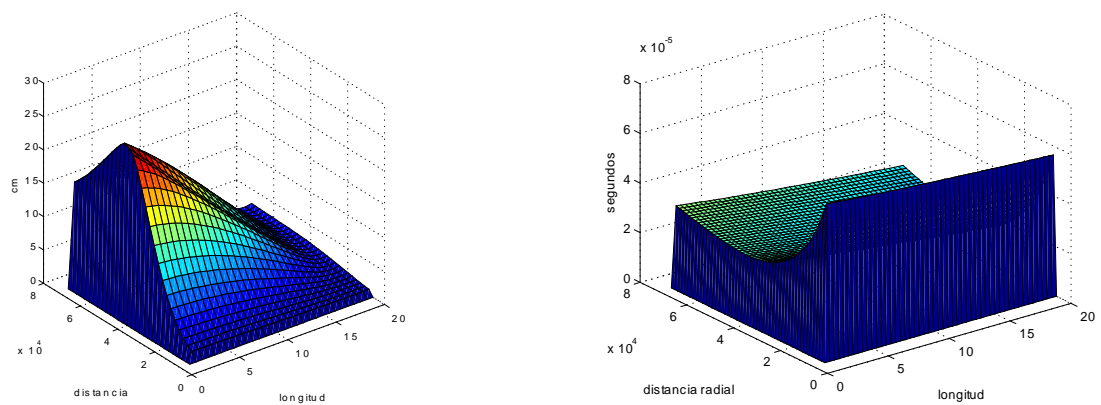


Fig. 6.62

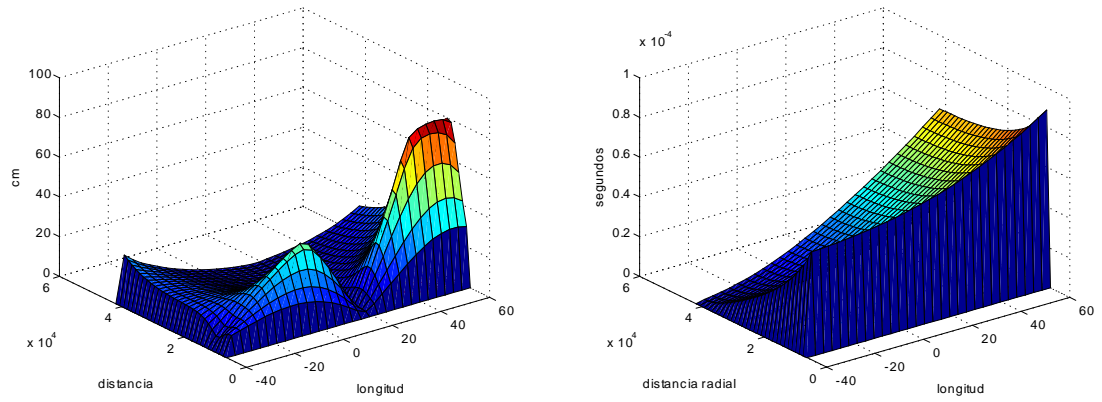


Fig. 6.63

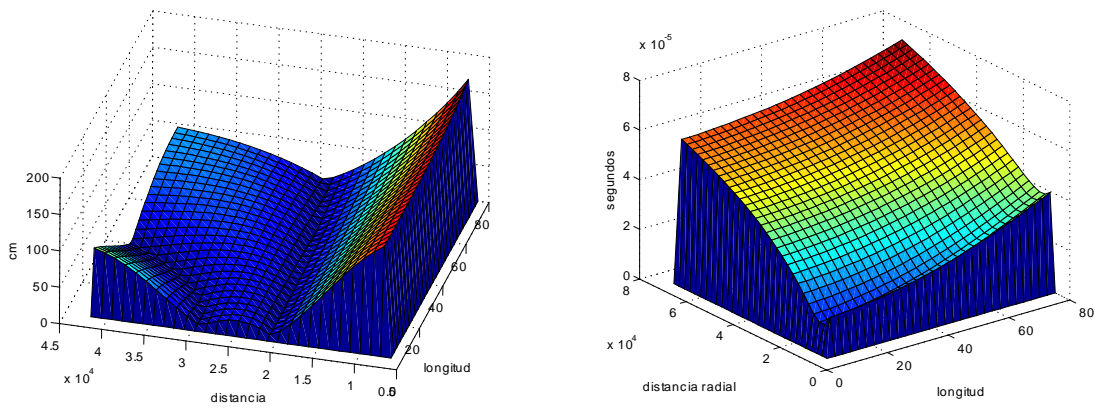


Fig. 6.64

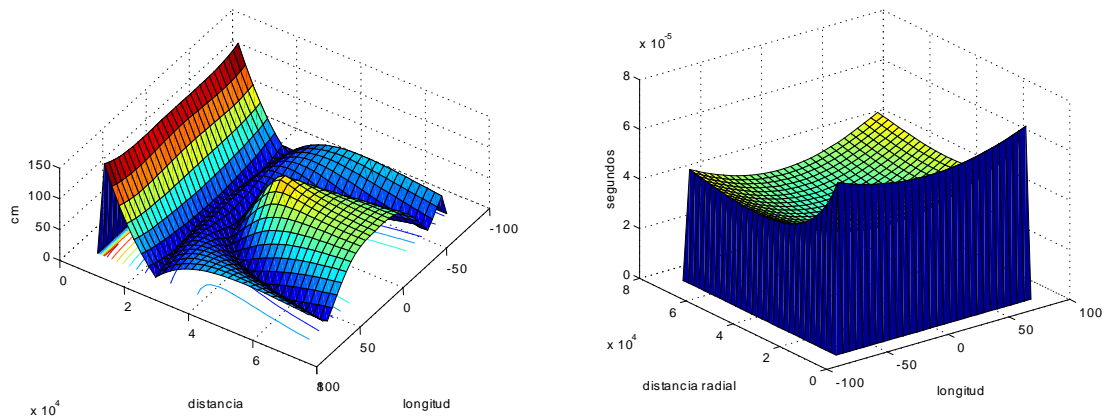


Fig. 6.65

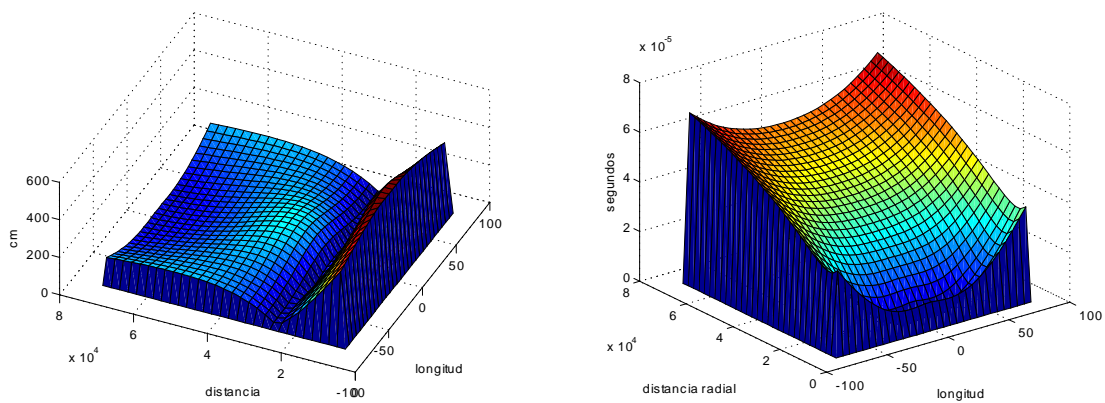


Fig. 6.66

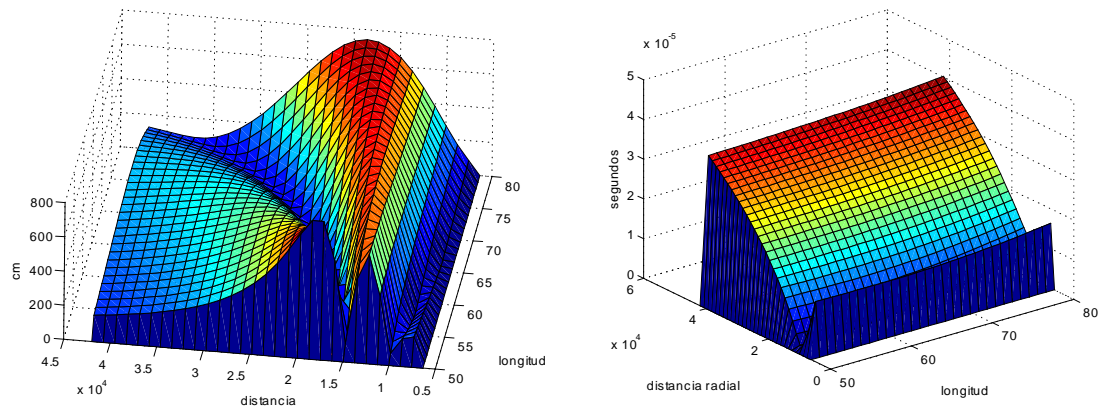


Fig. 6.67

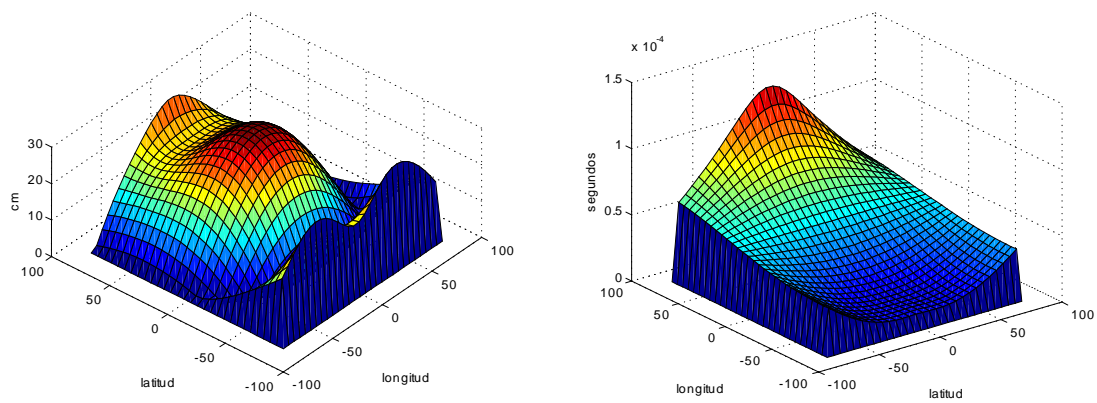


Fig. 6.68

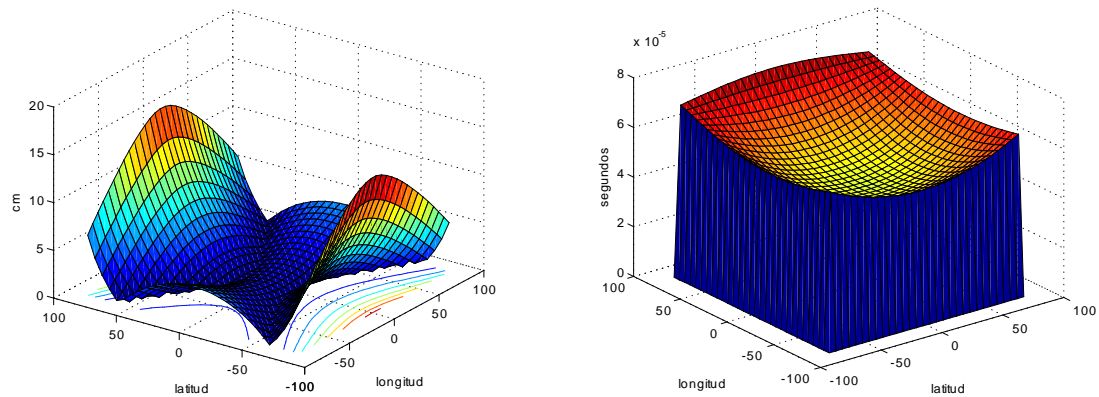


Fig. 6.69

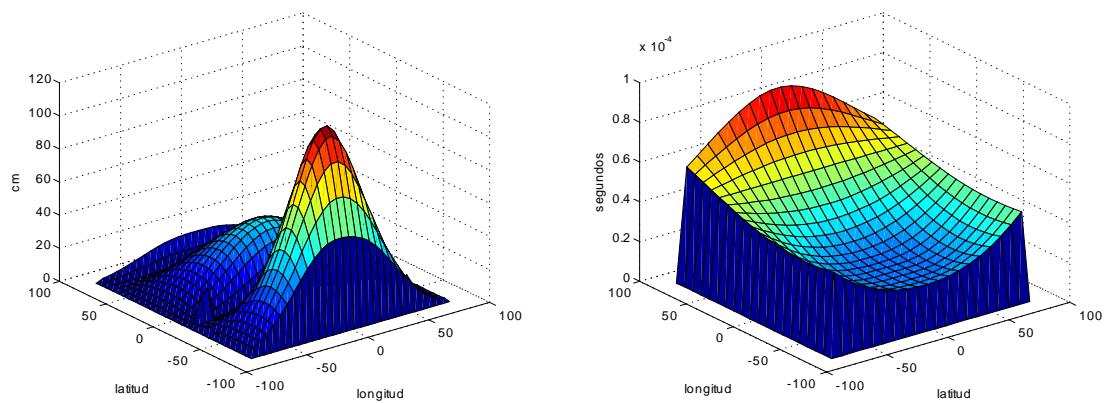


Fig. 6.70

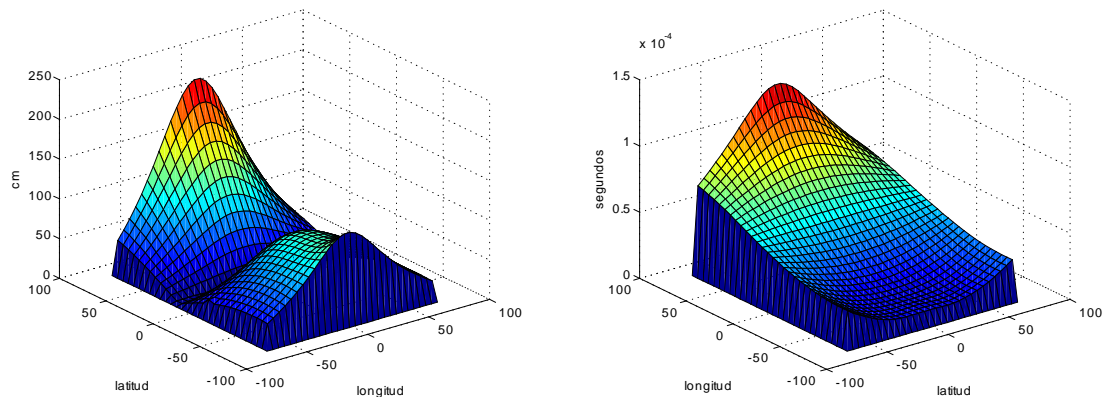


Fig. 6.71

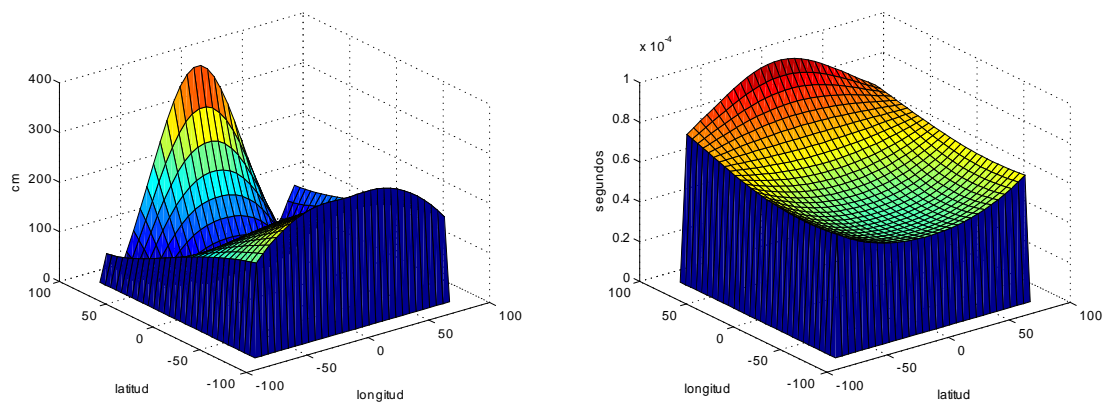


Fig. 6.72

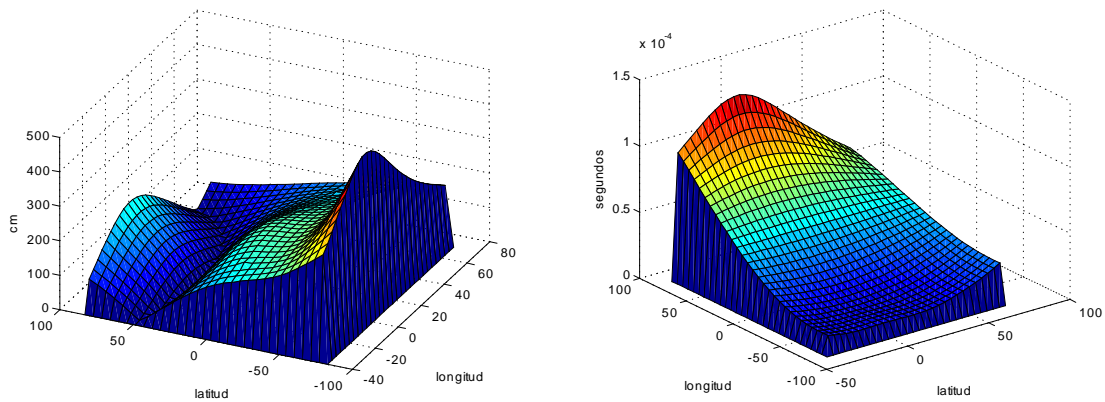


Fig. 6.73

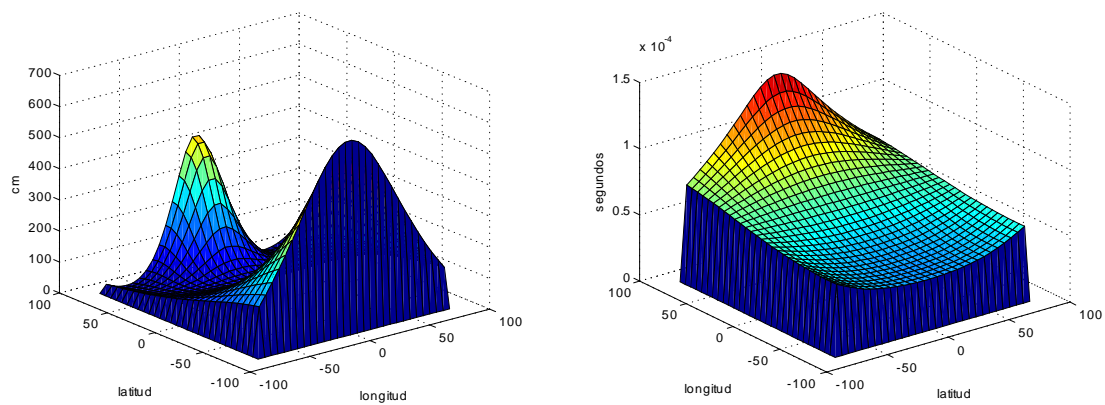


Fig. 6.74

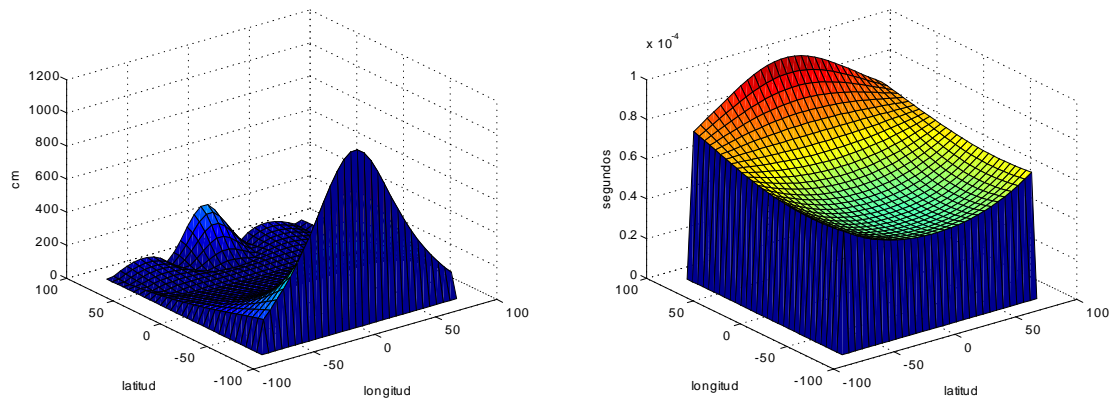


Fig. 6.75

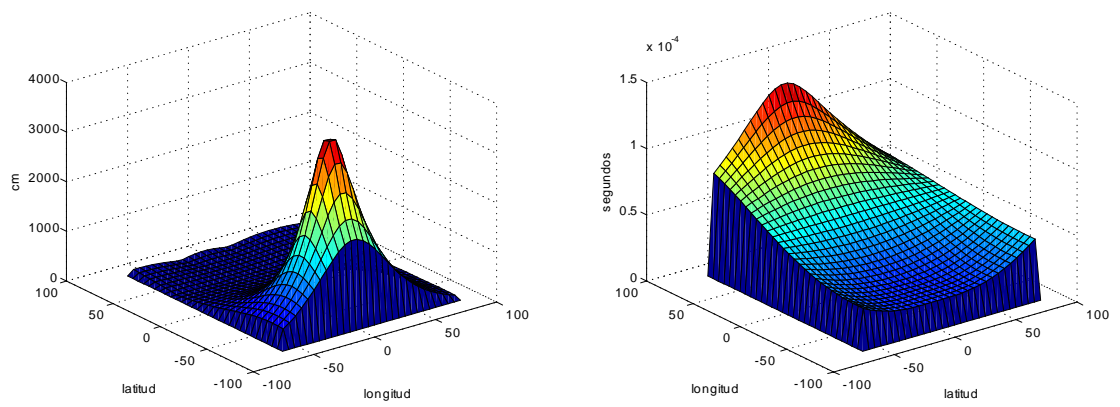


Fig. 6.76

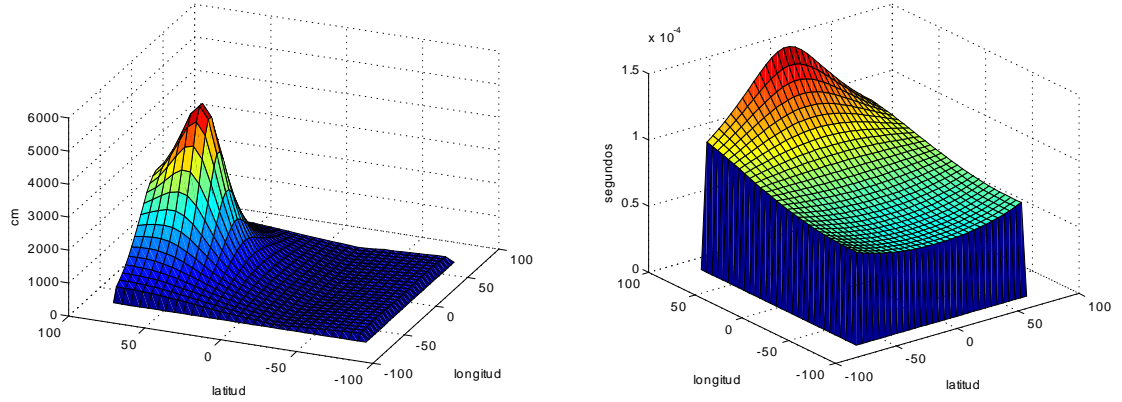


Fig. 6.77

y aquí también se ve cómo las diferencias de localizaciones siguen unos patrones bastante característicos, que son, primero, el que corresponde a superficies suaves con máximos absolutos bien definidos; segundo, el que corresponde a superficies con puntos de ensilladura y, tercero, el que corresponde a superficies suaves en las que aparecen una, o más, ondas. Por su parte, y esto es lo mas interesante, las diferencias de localizaciones espaciales varían notablemente desde unos pocos centímetros hasta valores realmente significativos, que pueden llegar a ser de varias decenas de metros, como se puede ver en la parte izquierda de la última figura (*Fig. 6.77*).

Por último, para dar una idea de las magnitudes involucradas con respecto a las diferencias de tiempos de emisión que, como se puede ver son del orden de 10^{-4} o 10^{-5} , según los casos, así como de la posibilidad de su medición, hay que tener en cuenta que la sincronización de los relojes atómicos convencionales a bordo, por ejemplo, de los satélites GPS o de los satélites geoestacionarios, es del orden de 10^{-9} sg/día.

Conclusiones

Como consecuencia del trabajo realizado podemos concluir que con los dos métodos desarrollados en esta Tesis se puede implementar un procedimiento técnicamente viable para geolocalizar en el espacio-tiempo, mediante mediciones TDOA realizadas por satélites artificiales, cualquier radiotransmisor pasivo situado en el entorno de la Tierra, tanto si este entorno se modela de acuerdo con la Teoría Especial de la Relatividad como con la Teoría General de la Relatividad (versión Mecánica postnewtoniana).

En la implementación del procedimiento hay que tener en cuenta que, para poder utilizar el primer método, es necesario que el radiotransmisor esté sobre la superficie de la Tierra. En este caso se pueden utilizar:

a) Tres satélites geoestacionarios, con la consiguiente ventaja de que no se necesitan satélites específicos y la desventaja de que se encuentran, en el mejor de los casos, dos localizaciones (excepto si el radiotransmisor está sobre el Ecuador).

b) Tres satélites ecuatoriales, con la ventaja de que no hay necesidad de tener en cuenta las variaciones de posición de los satélites geoestacionarios, pero con el inconveniente de que, igual que en la opción anterior, se obtienen, en general, dos localizaciones.

c) Cuatro satélites geoestacionarios, con la ventaja, como en a), de que no se necesitan satélites específicos, al tiempo que se puede disponer de un número mayor de mediciones. El inconveniente es que se tienen, en general, como en las opciones anteriores, dos localizaciones.

d) Cuatro satélites ecuatoriales, con la ventaja, como en c), de que se puede disponer de un número mayor de mediciones y la desventaja de que, como en las opciones anteriores, se obtienen, en general, dos localizaciones.

Por otro lado, tanto si el radiotransmisor está, como si no está, sobre la superficie de la Tierra, se puede aplicar el segundo método con cuatro o cinco satélites arbitrarios con la condición de que todos ellos no estén en el mismo plano orbital

cuando reciben la señal del radiotransmisor (en particular no todos pueden ser ecuatoriales y, por lo tanto, geoestacionarios). En este caso, hay que tener en cuenta que si se utilizan cuatro satélites entonces, nuevamente, se obtienen dos localizaciones, de manera que, para obtener una única localización, es necesario utilizar cinco satélites.

Para elegir la opción más eficiente habrá de tenerse en cuenta que la opción aparentemente más atractiva, esto es, la de utilizar cinco satélites, puede no ser técnicamente la más eficiente porque cuanto mayor sea el número de satélites utilizado mayor será el coste de la localización.

A este respecto, los siguientes factores son determinantes:

1º) la facilidad con que se pueda determinar si el radiotransmisor está sobre la superficie de la Tierra;

2º) la capacidad de utilización de satélites operativos en otros servicios, como el de Comunicaciones o el de Navegación, y

3º) la disponibilidad de más de tres satélites.

Los aspectos que requieren mayor atención para implementar correctamente este procedimiento son:

1º.- la programación de las ecuaciones (3.121)-(3.129), (4.78)-(4.81) y (5.24)-(5.28);

2º.- la elaboración de las funciones con las que se encuentran las soluciones de las ecuaciones (3.29), (3.74), (3.105), (4.40), (4.51), (4.69) y (4.77) y

3º.- el acceso a los distintos sistemas disponibles, que están detallados a lo largo del Capítulo 5 (v., p.e., (5.7), (5.12), (5.18) y (5.23)).

Apéndice

Cantidades adimensionales

velocidad de la luz	1
Constante gravitatoria	1

Valores en segundos

masa de la Tierra	$1,478 \times 10^{-11}$
un kilómetro	$3,336 \times 10^{-6}$
radio medio de la Tierra	$2,125 \times 10^{-2}$
recíproco de la velocidad angular de la Tierra	$1,371 \times 10^4$
radio geoestacionario	$1,407 \times 10^{-1}$

Bibliografía

- [1] J. L. Synge, “Relativity: The General Theory of Relativity”, New York, North-Holland, 1960, ch. 2.
- [2] N. T. Gaarder, “On estimating the location of a signal source”, IEEE Trans. Information Theory, IT-15, 5, 1969.
- [3] K. C. Ho and Y. T. Chan, “Solution and Performance Analysis of Geolocation by TDOA”, IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol. 29, No 4, 1993.
- [4] W. C. Scales and R. Swanson, “Air and sea rescue via satellite systems”, IEEE Spectrum, pp. 48-52, 1984.
- [5] W.W. Smith and P. G. Steffes, “time-delay techniques for satellite interference location system”, IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol. 25, No 2, pp. 224-230, 1989.
- [6] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger and J. Collings, “Global Positioning System”, New York, Springer-Verlag, 1997.
- [7] N. Ashby, “Relativity in the Global Positioning System”, Living Rev. Relativity, 1, pp. 1-45, 2007.
- [8] T. B. Bahder, “Navigation in Curved Space-time”, Am. J. Phys., 69, pp. 315-321, 2001.
- [9] T. B. Bahder, “Clock Synchronization and Navigation in the Vicinity of the Earth”, Nova Science Pub. Inc., 2008.
- [10] T. B. Bahder, “Relativity of GPS Measurement”, Phys. Rev. D, 68, 2003.
- [11] M. H. Soffel, “Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy”, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989, ch. 5.

- [12] IERS Technical Note No. 32. IERS Conventions (2003). Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2004, sec. 11.2.
- [13] W. H. Foy, “Position-location solutions by Taylor series estimation”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-12, 2, pp. 187-194, 1976.
- [14] G. Mellen, M. Pachter and J. Raquet, “Closed-Form Solution for Determining Emitter Location Using Time Difference of Arrival Measurements”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 39 3, pp. 1056-1058, 2003.
- [15] E. G. Bakhoun, “Closed-Form Solution of Hyperbolic Geolocation Equations”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 42 4, pp. 1396-1404, 2006.
- [16] B. D. Tapley, B. E. Schutz and G. H. Born, “Statistical Orbit Determination. Burlington”, MA, Elsevier Academic Press, 2004.
- [17] Hay un error en el cálculo de la segunda integral en [1]. El cálculo correcto se puede encontrar aquí y en [8].
- [18] N. Ashby and P. L. Bender , “Measurement of the Shapiro Time Delay Between Drag-Free Spacecraft, in Laser, clocks and drag-free control: exploration of relativistic gravity space”, H. Dittus, C. Lämmerzahl and S. G. Turyshev Eds.: Springer, 2007.
- [19] E. M. Soop, “Handbook of Geostationary Orbits”, Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 1994.
- [20] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity”, John Wiley and Sons, 1972, ch. 8, p.201.
- [21] Dave Adamy, “Precision Emitter-Location Techniques”, JED, The Journal of Electronic Defense, December 2002.
- [22] J. L. Poirot and G. V. McWilliams, “Application of Linear Statistical Models to Radar Location Techniques”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-10, No. 6, 1974.
- [23] D. E. Manolakis, “Efficient Solution and Performance Analysis of 3-D Position Estimation by Trilateration”, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 32, No. 4, 1996.

- [24] R. O. Schmidt, "A New Approach to Geometry of Range Difference Location", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-8, No. 6, 1972.
- [25] J. P. Y. Lee and J. Liu, "Passive Emitter AOA Determination and Geolocation Using a Digital Interferometer", RTO MP-070. Poland, 2001.
- [26] H. C. Schau and A. Z. Robinson, "Passive Source Localization Employing Intersecting Spherical Surfaces from Time-of-Arrival Differences", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal processing, Vol. ASSP-35, No. 8, 1987.
- [27] G. C. Carter, "Time Delay estimation for passive sonar signal processing", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-29, pp. 463-469, 1981.
- [28] A. G. Piersol, "Time Delay estimation using phase data", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-29, pp. 471-477, 1981.
- [29] T. N. Claytor, D. A. Greene, R. L. Randall, T. D. Ohe, and D. Gawarecki, "Development of a passive acoustic imaging system", Argonne Nat. Lab., ANL-83-102, 1983.
- [30] L. Kastic, "Local steam transit time estimation in a boiling water reactor", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-29, pp. 555-560, 1981.
- [31] B. T. Fang, Comments on "Analysis of Geolocation by TDOA", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 31, No. 1, 1995.
- [32] H. J. Du And J. P. Y. Lee, "Passive Geolocation Using TDOA Method from UAVs and Ship/Land-Based Platforms for Maritime and Littoral Area Surveillance", Defence R&D Canada-Ottawa. DRDC Ottawa TM 2004-033.
- [33] K. C. Ho and M. Sun, "Passive Source localization Using Time Differences of Arrival and Gain Ratios of Arrival", IEEE Transactions on Signal Processing, 2008.
- [34] Y. T. Chan, H. Yau Chin Hang and P-C. Ching, "Exact and Approximate Maximum Likelihood Localization Algorithms", IEEE Transactions on vehicular Technology, Vol. 55, No. 1, 2006.
- [35] D. Musicki and W. Koch, "Geolocation using TDOA and FDOA Measurements", 11th. International Conference on information Fusion. Cologne, Germany. 2008.

- [36] P. Chesnut, "Emitter location accuracy using TDOA and differential doppler", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol.18, No. 2, pp. 214-218, 1982.
- [37] B. T. Fang, "Simple Solutions for Hyperbolic and Related Position Fixes", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol.26, No. 5, pp. 214-218, 1990.
- [38] J. Li, X. Sun, P. Huang and J. Pang, "Performance Analysis of Active Target Localization Using TDOA and FDOA Measurements in WSN", 22nd. International Conference on Advanced information Networking and Applications. 2008.
- [39] Y.T. Chan and K. C. Ho, "Joint Time-Scale and TDOA Estimation: Analysis and Fast Approximation", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 53, No. 8, 2005.
- [40] Y. Zhou and L. Lamont, "Constrained Linear Least Squares Approach for TDOA Localization: A Global Optimum Solution", IEEE Proc. of. ICASSP Las Vegas, NV. USA. 2008.
- [41] Y. T. Chan and K. C. Ho, "TDOA-SDOA Estimation with Moving Source and Receivers", IEEE 2003.
- [42] Y. Qi, H. Kobayashi and H. Suda, "Analysis of Wireless Geolocation in a Non-Line-of-Sight Enviroment", IEEE Transactions on Wireless Communications, Vol. 5, No. 3, 2006.
- [43] K. C. Ho, X. Lu and L. Kovavisaruch, "Source Localization Using TDOA and FDOA Measurements in the Presence of Receiver Location Errors: Analysis and Solution", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 55, No. 2, 2007.
- [44] T. Pattison and S. L. Chou, "Sensitivity Analysis of Dual-Satellite Geolocation", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 36, No. 1. 2000.
- [45] K. C. Ho and Y-T. Chan, "Geolocation of a Known Altitude Object From TDOA and FDOA Measurements", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 33, No. 3. 1997.
- [46] Y. T. Chan and K. C. Ho, "A Simple and Efficient Estimator for Hyperbolic Location", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 42, No. 8, 1994.

- [47] R. Bucher and D. Misra, "A Synthesizable VHDL Model of the Exact Solution for Three-dimensional Hyperbolic Positioning System", *VLSI Design* Vol. 15 (2), pp 507-520, 2002.
- [48] G. H. Niezgoda and K. C. Ho, "Geolocation by combined range difference and range rate measurements", in *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process (ICASSP'94)*, Adelaide, Australia, vol. 2, 1994, pp. 357-360.
- [49] J. S. Abel, "A divide and conquer approach to least-squares estimation", *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 26, no. 2, pp. 423-427, Mar. 1990.
- [50] S. Nanda Kishore and T. S. Lamba, "Evaluation of TDOA Techniques for Geolocation in CDMA Systems", Department of E&ECE IIT Kharagpur 721302 India.
- [51] R. Bardelli, D. Haworth and N. Smith, "Interference localisation for the Eutelsat satellite system", in *Global Telecommunications Conference, GLOBE-COM'95*, vol. 3, Singapore, November 1995, pp. 1641-1651.
- [52] J. Kaufmann and W. Hutchinson, "Emitter Location with LES-9/9 Using Differential Time of Arrival and Differential Doppler Shift", Report 698 (Rev. 1), Lincol Laboratory, MIT, Lexington, Massachusetts, 2000.
- [53] W. A. Gardner and Ch. Chen, "Signal-Selective Time-Difference-of-Arrival Estimation for Passive Location of Man-Made Signal Sources in Highly Corruptive Environment, Part I: Theory and Method", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, pp. 1168-1184, 1992.
- [54] G. Strang and K. Borre, "Linear Algebra, Geodesy and GPS", Wellesley-Cambridge Press, 1997.
- [55] H. S. Ruse, "An absolute partial differential calculus", *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 2, 1931.
- [56] K. Yano and Y. Muto, "Notes on the deviation of geodesics and the fundamental scalar in a Riemannian space", *Proc. Phys-Math. Soc. Jap.*, Vol. 18, p. 142, 1936.
- [57] J. A. Schouten, "Ricci-Calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications", 2nd. edn. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen Heidelberg, 1954.

- [58] V. A. Brumberg, “Essential Relativistic Celestial Mechanics”, Adam Hilger, New York, 1991.
- [59] J. M. Gambi, M. C. Rodriguez-Teijeiro, M. L. García del Pino and M. Salas, “Shapiro time-delay within the Geolocation problem by TDOA”. Aceptado para publicación en IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems (18 de mayo de 2010).